O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

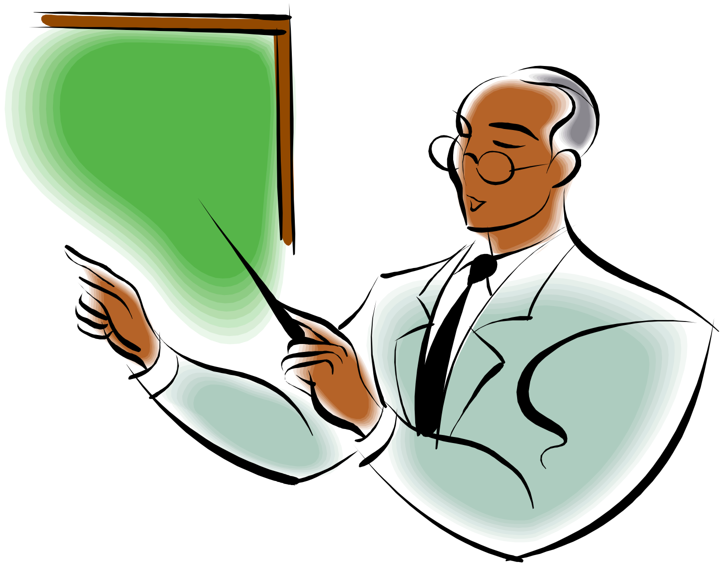
TOSHKENT AVTOMOBIL-YO'LLAR INSTITUTI

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

OLIY MATEMATIKADAN MISOL VA MASALALAR TO'PLAMI

(1-qism)

TEXNIKA OLIY O'QUV YURTLARI BIRINCHI KURSLARI
UCHUN O'QUV QO'LLANMA



TOSHKENT-2005

ANNOTATSIYA

Ushbu o'quv qo'llanma oliy matematika fani barcha mutaxassisliklarining bakalavriati I-kurs, I va II-semestrga mo'ljallab tuzilgan.

Ishlatilayotgan yangi ishchi dasturlarning hali tajribadan to'la o'tmaganligi sababli, keyinchalik mumkin bo'lgan o'zgarishlarni ham iloji boricha e'tiborga olgan holda mavzularni misol va masalalar bilan yoritishni afzal ko'rdik.

Kitoblar tanqisligi hisobga olinganda ushbu to'plam amaliyot darslarida talabalarning darsda shug'ullanishi va o'qituvchilarning dars o'tishi samaradorligini oshiradi va dars o'tkazish uchun ketadigan vaqtni foydaliroq sarflashga yordam beradi.

O'quv qo'llanma Oliy matematika kafedrasi majlisida Bayonnoma №11. 5.01.05 yil) muhokama qilingan va ma'qullangan.

TAYI Tabiy va umummuxandislik fanlar kafedralari markazi ilmiy-uslubiy Kengashi majlisida (Bayonnoma № 6. 16.02.05 yil) tasdiqlangan.

Muallif: prof. G'afurov M.O'.
dosent. Valijonov X.
katta o'q. Ro'zmatova N.
katta o'q. Yuldashev C.
katta o'q. Saydaliev Z.

Taqrizchi: Fizika-matematika fanlari doktori, prof. A.A.Rahimov (TTYMI)

I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

1-§. DETERMINANTLAR

Ikkinchi tartibli determinant.

Ta'rif Agar, $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ sonlar berilgan bo'lsa, shu sonlar orqali aniqlangan $a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$ ushbu songa ikkinchi tartibli determinant deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. a_{11},a_{12} larga determinantning birinchi, a_{21},a_{22} larga esa ikkinchi yo'l elementlari deyiladi. a_{11},a_{21} larga determinantning birinchi a_{12},a_{22} larga esa ikkinchi ustun elementlari deyiladi. a_{11},a_{22} larga determinantning bosh,
a_{21},a_{12} larga determinantning yordamchi diagonal elementlari deyiladi.

(1) dan ko'rinadiki ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun, bosh diagonal elementlar ko'paytmasidan yordamchi diaganal elemenlari ko'paytmasini ayirish kifoya ekan.

Misol**.**

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} =21-81= -60$$

Uchinchi tartibli determinant.

Ta'rif. Berilgan $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$ sonlar orqali aniqlangan va qo'yidagicha belgilangan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

songa uchinchi tartibli determinant deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta yo'l va uchta ustun elementlaridan iborat bo'lib, a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3) hammasi 9 ta element bo'ladi.

a_{ij} dagi birinchi indeks i yo'lning nomerini ya'ni nechanchi yo'l elementi ekanligini bildiradi. Ikkinchi indeks j esa ustunning nomerini ya'ni nechanchi ustun elemnti ekanligini bildiradi. Determinantlar har vaqt biror aniq son bo'lgani uchun uchunchi tartibli determinant ham biror aniq sonni ifodalaydi, bu son esa qo'yidagicha hisoblanadi.

Birinchi diagonal elemenlar ko'paytmasi va asoslari shu diagonalga parallel bo'lgan ikkita teng yonli uchburchaklar uchlaridagi elemenlar ko'paytmalarining algebraik yitsindisidan ikkinchi diagonal elemenlar ko’paytmasi va asoslari shu diagonalga parallel bo’lgan ikkita teng yonli uchburchak uchlaridagi elementlar ko’paytmalarining algebraik yitsindisini ayirganiga teng bo’ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

n-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko’rinishdagi simvolga n-tartibli determinant deyiladi. Bu yerda ham yo’l, ustun, element va diagonal tushunchalari o’z kuchlarini saqlab qoladi.
n-tartibli determinant ham biror aniq sonni ifadalaydi. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni minor va algebraik to’ldiruvchi tushunchalaridan keyin ko’ramiz.

Determinantning xossalari.

1-xossa. Agar determinantning yo’llarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o’zgarmaydi.
2-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita yo’lini (yoki ustunini) o’zaro almashtirilsa, determinant qiymati o’z ishorasini o’zgartiradi.
3-xossa. Determinantning biror yo’lining (yoki ustunining) barcha elementlari nol bo’lsa, determinantning qiymati nol bo’ladi.
4-xossa. Ixtiyoriy ikkita yo’li yoki ikkita ustuni bir xil bo’lgan determinant qiymati nol bo’ladi.
5-xossa. Istalgan yo’l (yoki ustun) ning umumiy elementini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.
6-xossa. Determinantning biror yo’l (yoki ustun) elemenlariga boshqa yo’l (yoki ustunining) elementlarini biror songa ko’paytirib qo’shganda determinantning qiymati o’zgarmaydi.
Bu xossalarning to’sriligini bevosita determinantlarni hisoblab ishonch hosil qilish mumkin.

Minorlar va algebraik to’ldiruvchilar.

1-ta'rif. biror n-tartibli determinantning a_{ij} elementinig minori deb, shu element turgan yo'l va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan n-1 tartibli determinantga aytiladi va odatda M_{ij} orqali belgilanadi.
Masalan.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantning a_{23} elementining minori $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ikkinchi tartibli determinant bo'ladi.

2-ta'rif. n-tartibli determinantning a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi deb shu element minorini $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olinganiga aytiladi va A_{ij} orqali belgilanadi.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantning a_{43} elementining minorini va a_{21} elementining algebraik to'ldiruvchisini hisoblang.

$$M_{43}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3-20-15+8= -24$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}= -M_{21}= -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}= -24+3-6+4= -23.$$

Minor va algebraik to'ldiruvchilar tushunchalari kiritilgandan keyin determinantning yana uchta xossasini ko'rib o'taylik.

7-xossa. Agar determinantning biror i-yo'lida (yoki j-ustunida) a_{ij} elementdan boshqa hamma elementlari nol bo'lsa, u holda bu determinant shu element bilan shu elementning algebraik to'ldiruvchisi ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1j} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2j} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & a_{il} & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nj} & .... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij}\ Aij = (-1)^{i+j}a_{ij}\ M_{ij}\ .$$

8-xossa. Har qanday determinant, biror yo'li (yoki ustuni) elementlari bilan shu elementlarning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yitsindisiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \quad \text{yoki} \quad a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}.$$

Determinantning 8-xossasidan foydalanib istalgan tartibli determinantni hisoblash mumkin.

Misol.

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -264 .$$

9-xossa. Determinantning biror yo'li (yoki ustuni) elementlarining boshqa yo'li (yoki ustuni) elementlarining algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yitsindisi nol bo'ladi.

Masalan. Ikkinchi ustun elementlarini birinchi ustun elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirsak $a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0$ bo'ladi.

Misollar.

Quyidagi determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ a-2 & 1 \end{vmatrix}$

Tenglamani eching.

7. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.(9-13)

9. $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 13. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$

Tenglamani eching.

14. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & \end{vmatrix} = 0$ 15. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Quyidagi determinantlarni eng kulay yo'l yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang.(16-22)

16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 1 & d & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2-§. MATRISA VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Berilgan a_{ij} (i=1,...,m; j=1,...,n) sonlardan tashkil topgan quyidagi

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{yoki} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ko'rinishdagi jadvalga matrisa deyiladi. (1) ga m ta yo'lli, n ta ustunli ,mxn o'lchovli matrisa deyiladi. a_{ij} larga matrisaning elementlari deyiladi.

Agar mxn bo'lsa, (1) ga to'g'ri burchakli yoki o'rta matrisa deyiladi. Agar m=n bo'lsa, (1) ga kvadrat matrisa deyilib, uning o'lchami nxn bo'ladi.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nn} \end{Vmatrix}$$ -kvadrat matrisa. $$\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{Vmatrix}$$ -ustun matrisa deyiladi.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \end{Vmatrix}$$ - yo'l matrisa deyiladi.

Matrisa faqat jadval bo'lib, u biror aniq sonni ifodalamaydi. Matrisada katta, kichik degan tushuncha bo'lmaydi. Matrisalar odatda A,V,S,-xarflar orqali belgilanadi.

Kvadrat matrisalar uchun uning elementlaridan tuzilgan determinant quyidagicha bo'ladi:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hamma elementlari nol bo'lgan matrisaga nol matrisa deyiladi.

Bosh diagonal elementlaridan boshqa xamma elementlari nol bo'lgan kvadrat matrisaga diagonal matrisa deyiladi.

Bosh diagonal elementlari bir bo'lib,boshqa barcha elementlari nol bo'lgan kvadrat matrisaga birlik matrisa deyiladi va odatda E xarfi orqali belgilanadi.

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad |E|=1,$$ bo'lishi ravshan.

Har qanday A va V matrisalarning A=V bo'lishi uchun ular bir xil o'lchovli va barcha mos elementlari teng bo'lishi shart.

Matrisani songa ko'paytirish.

Biror A matrisani k songa ko'paytirish deb,A matrisaning xamma elementlarini shu k songa ko'paytirishdan xosil bo'lgan matrisaga aytiladi va kA ko'rinishda yoziladi.

$$kA=Ak=\begin{Vmatrix} ka_{11} & .... & ka_{1n} \\ .... & .... & .... \\ ka_{m1} & .... & ka_{mn} \end{Vmatrix}$$

Matrisalarni qo'shish va ko'paytirish.

Agar A va V matrisalar bir xil o'lchovli bo'lsa, ularning yig'indisi deb shunday S matrisaga aytiladiki, bu S matrisaning elementlari A va V matrisalarning mos elementlarining yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .... & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2q} \\ .... & .... & .... & .... \\ b_{p1} & b_{p2} & .... & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{Vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & .... & b_{1n} \\ .... & .... & .... \\ b_{m1} & .... & b_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & .... & a_{1n}+b_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1}+b_{m1} & .... & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix}$$

Berilgan matrisalarni ko'paytirish uchun A matrisaning ustunlari soni n, V matrisaning yo'llar soni p ga teng bo'lishi shart. Aks xolda AV ma'noga ega bo'lmaydi. Ikkita matrisani ko'paytirganda xosil bo'lgan matrisaning yo'llar soni ko'payuvchi matrisaning yo'llar soniga, ustunlar soni esa ko'paytuvchi matrisaning ustunlar soniga teng bo'ladi.

A_{mxn} x B_{pq}=C_{mq}

$$C= AxB =\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .... & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & .... & c_{2q} \\ .... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & .... & c_{mq} \end{pmatrix}, \qquad A\times B \neq B\times A$$

Shunday qilib ikkita matrisaning ko'paytmasi yana matrisa bo'lib , uning c_{ij} elementi A matrisaning i-yulidagi xamma elementlarini V matrisaning j-ustunidagi mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+ a_{i2}b_{2j} +...+ a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\ . \ \ (i=1,...,m;\ j=1,...,q).$$

Misol.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Teskari matrisa

Teskari matrisa tushunchasi faqat kvadrat matrisalarga nisbatan kiritiladi.

1-ta'rif. Agar xar qanday A va V kvadrat matrisalar uchun AV=VA=Ye tenglik o'rinli bo'lsa ,u xolda V matrisani A matrisaga (va aksincha) teskari matrisa deyiladi. Odatda A matrisaga teskari matrisa A^{-1} ko'rinishda yoziladi va $AA^{-1}= A^{-1}A=E$ bo'ladi. (Ye-birlik matrisa).

2-ta'rif. Agar A kvadrat matrisaning determinanti $|A|\neq0$ bo'lsa, A matrisaga maxsusmas matrisa deyiladi .Agar |A|=0 bo'lsa ,u xolda maxsus matrisa deyiladi

3-ta'rif. Biror A matrisaning barcha mos yo'l va ustunlarining o'rinlarini almashtirishdan xosil bo'lgan matrisaga A ga nisbatan transponirlangan matrisa deyiladi va odatda A* ko'rinishda belgilanadi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & .... & a_{m2} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{1n} & a_{2n} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Teorema. Har qanday A kvadrat matrisa teskari A^{-1} matrisaga ega bo'lishi uchun A matrisaning maxsusmas matrisa bo'lishi zarur va kifoya.

Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}=q, \quad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-9\neq 0. \quad A^{-1}=-1/9\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Haqiqatan $A^{-1}A=AA^{-1}=E$ tenglikni o'rinli ekanligini xisoblab ko'rish mumkin.

Matrisaning rangi.

Bizga mxn o'lchovli to'g'ri to'rt burchakli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. A matrisaning k-tartibli minori deb , uning k ta ustuni va k ta yo'li kesishishdan xosil bo'lgan kxk o'lchovli kvadrat matrisaning determinantiga aytiladi (k=min(m,n)) mxn o'lchovli matrisaning k-tartibli minorlar soni $C_m^k \cdot C_n^k$ bo'ladi.

2-ta'rif. Matrisaning rangi deb ,uning noldan farqli bo'lgan minorlarining eng yuqori tartibiga aytiladi.

Agar matrisaning rangi k bo'lsa , u xolda bu matrisaning k+1 tartibli minoridan boshlab barcha yuqori tartibli minorlari nol bo'ladi.

Matrisaning rangiga qo'yidagicha xam ta'rif berish mumkin.

3-ta'rif. A matrisaning rangi deb uning chiziqli bog'liqli bo'lmagan yo'llarining (yoki ustunlarining)maksimal soniga aytiladi.

Misollar.

23. Agar $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lsa,

a) $3A+2B$, b) $-A+3B$, v) $2A+4D$, g) $\frac{1}{2}A+1{,}5B$ larni hisoblang.

Ushbu matrisalarning ko'ypatmasini toping (24-29)

24. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, a) A*B, b)B*A

25. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 7 & 0\end{pmatrix}$, a) A*B , b) B*A,

26. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^2$

31. $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$

32. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$

33. $\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}^2$

34. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$

Matrisalar rangini elementar almashtirishlardan foydalanib toping (35-38)

35. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 9 & -19 & -1\\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2\end{pmatrix}$

36. $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$

37. $C=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

38. $Д=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$

Ushbu matrisalarga teskari matrisalarni toping. (39-42)

39. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 40. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ 41. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 42. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Matrisali tenglamalarni eching. (43-46)

43. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ 44. $X * \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ 46. $X * \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

Ushbu matrisalarga teskari matrisalarni elementar almashtirish yordamida toping. (47-50)

47. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 48. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

49. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 50. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3-§. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI. KRAMER FORMULASI VA GAUSS USULI.

Kramer formulasi.

Faraz qilaylik birinchi darajali, ikkita noma'lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

(1) sistemaning 1-tenglamasini a_{22} ga, 2-tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1= b_1a_{22}-b_2a_{12} \quad \rfloor \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

Agar (1) sistemaning 1-tenglamasini $-a_{21}$ ga, 2-tenglamasini a_{11} ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2= b_2a_{11}-b_1a_{21} \quad \rfloor \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3)$$

(2) va (3) larga e'tibor bersak ikkinchi tartibli determinantning ta'rifiga ko'ra

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad (4)$$

(4) ga Kramer formulasi deyiladi.
(1) sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun $\Delta \neq 0$ bo'lishi zarur va kifoya.
(4) ga e'tibor bersak Δ berilgan (1) sistemadagi noma'lumlarning oldidagi koeffiSiyentlardan tuzilgan 2-tartibli determinant Δ_1, Δ_2 lar esa mos ravishda Δ ning birinchi va ikkinchi ustunlarini ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil bo'lgan determinantlar.
Agar uch noma'lumli uchta algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{berilgan bo'lib,} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{bo'lsa}$$

berilgan sistemaning yechimi

$$x_1= \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2=\frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_3= \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (5)$$

Kramer formulalari orqali aniqlanadi. Bu yerda xam Δ_1, Δ_2, Δ_3 lar
Δ ning ustun elementlarini mos ravishda
ketma-ket ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil bo'ladi.

Agar birinchi darajali n ta noma'lumli n ta algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ berilgan bo'lib, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{31} & a_{32} & .... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa ,berilgan sistemaning yechimi Kramer formulasiga ko'ra qo'yidagicha aniqlanadi.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ ..., \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (6)$$

Δ_1, Δ_2, …, Δ_n lar ning ustun elementlarini mos ravishda ketma-ket ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil bo'ladi.

Misol. 1) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ (x=-1; u=2), 2) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 2y - 5z = 3 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases}$,

(x=1;y=-2; z=-1).

Agar uch noma'lumli bir jinsli ikkita tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

berilgan bo'lib,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantning loaqal bittasi noldan farqli bo'lsa, u xolda (7) sistemaning barcha yechimlari

$$x = \Delta_1 t, \quad y = \Delta_2 t, \quad z = \Delta_3 t \qquad (8)$$

formula bilan aniqlanadi. (t-ixtiyoriy son).

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_1x + d_2y + c_3z = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

(9) da $\Delta \neq 0$ bo'lsa, x=0 ,u=0 ,z=0 lar sistemaning yagona yechimi bo'ladi.

Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, (9) ning cheksiz ko'p yechimi bo'lib, ular (7) kabi aniqlanadi.

Misol.

1) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ (x=3t; u=4t;z=11t),

2) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$ (x=2t;y=-3t; z=5t).

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

a_{ij} (i=1,...,m; j=1,...,n) koeffisiyentdagi birinchi indeks tenglama nomerini,ikkinchi indeks esa noma’lum nomerini bildiradi.

1-ta’rif. Agar (1) sistema yechimga ega bo’lsa, unga birgalikda bo’lgan sistema, agar yechimga ega bo’lmasa birgalikda bo’lmagan sistema deyiladi.

2-ta’rif. Agar birgalikda bo’lgan chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo’lsa, uni aniq sistema deyiladi. Agar cheksiz ko’p yechimga ega bo’lsa, uni aniqmas sistema deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasida qo’yidagi elementar almashtirishlarni bajarish mumkin.

1. Istalgan ikkita tenglamani o’rinlarini almashtirish mumkin.
2. Tenglamalarning ixtiyoriy bittasining ikkala tomonini noldan farqli istalgan songa ko’paytirish mumkin.
3. Ixtiyoriy bitta tenglamasining xar ikkala tomonini biror xaqiqiy songa ko’paytirib, boshqa biror tenglamaga qo’shish mumkin.

Bu elemantar almashtirishlarni bajarganimizda xosil bo’lgan sistema berilgan sistemaga teng kuchli bo’ladi.

Endi (1) sistemani Gauss usuli bilan yechishga o’taylik. Bu usulning moxiyati shundan iboratki noma’lumlarni ketma-ket yo’qotib ,berilgan sistemaga teng kuchli bo’lgan uchburchak (yoki pog’onasimon) ko’rinishdagi sistemaga keltiriladi. $a_{11}\neq 0$ deb (1) ning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo’lib, so’ngra uni $-a_{21}$ ga ko’paytirib, ikkinchi tenglamaga qo’shamiz.

Keyin $-a_{31}$ ga ko’paytirib, uchinchi tenglamaga qo’shamiz va shu jarayonni davom ettiraversak natijada shunday sistema xosil bo’ladiki, u sistemaning faqat birinchi tenglamasida x_1 qatnashib qolganlarida qatnashmaydi.

Shu jarayonni (1) sistemaning qolgan tenglamalariga ketma-ket tatbiq etsak, qo’yidagi ikkita sistemaning bittasiga kelamiz.

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + ... + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + ... + c_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ x_n = d_m \end{array}\right\} \text{(2) yoki} \qquad \left.\begin{array}{r} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + ... + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + ... + c_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ x_p + ... + c_{pn}x_n = d_p \\ p < n \end{array}\right\} (3)$$

(2) sistemaga uchburchak sistema , (3) ga esa pog’onali sistema deyiladi.

Agar (1) sistema (2) ko’rinishdagi sistemaga keltirilsa, u xolda (1)sistema birgalikda bo’lgan sistema bo’lib yechimi yagona bo’ladi. Agar(1)sistema (3) ko’rinishdagi sistemaga keltirilsa u xolda (1) sistema birgalikda bo’lib, yechimi cheksiz ko’p bo’ladi.

Misol. **1)**

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 &= 39 \end{aligned}\right\}$$

Yechish. $a_{11}=2\neq 0$ bo'lgani uchun birinchi tenglamani 2 ga bo'lamiz.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 7/2x_2 + 13/2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 &= 39 \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaning 1-tenglamasini (-3) ga ko'paytirib 2-tenglamaga, (-5)ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shsak

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 7/2x_2 + 13/2x_3 &= 0 \\ 7/2x_2 - 15/2x_3 &= 18 \\ 15/2x_2 - 33/2x_3 &= 39 \end{aligned}\right\}$$

Endi $a_{22} = \frac{7}{2} \neq 0$ bo'lgani uchun 2-tenglamani $\frac{7}{2}$ ga bo'lib , so'ngra uni $\frac{15}{2}$ ga ko'paytirib 3- tenglamadan ayirsak:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 7/\ 2x_2 + 13/\ 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 15/\ 7x_3 &= 36/\ 7 \\ -3/\ 7x_3 &= 3/\ 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_1=-4; x_2=3; x_3=-1.$$

2)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

1-tenglamani (-2) ga ko'paytirib 2-tenglamaga ,(-1) ga ko'paytirib

3-tenglamaga qo'shsak $\quad \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\ -3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -3x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$

$x_2=1+x_3$; $x_1=1-2-2x_3+ 4x_3-= 2x_3-1$.

Shunday qilib $\quad x_1=2x_3-1$; $\quad x_2=1+x_3$.

Demak berilgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekan, chunki x_3 ga ixtiyoriy son berib, x_1, x_2 larning cheksiz ko'p qiymatlarini xosil qilamiz.

Misollar.

51. $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x + 7y = 81 \end{cases}$ 52. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$ 53. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40 \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2ax - 3by = 0 \\ 3ax - 6by = ab \end{cases}$ 55. $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$ 56. $\begin{cases} mx - ny = (m-n)^2 \\ 2x - y = n \end{cases}$

57. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$ 58. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$ 59. $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$

60. $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$ 61. $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$ 62. $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases}$

63. $\begin{cases} x+2y+3y=4 \\ 2x+4y+6z=3 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$ 64. $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x-3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$ 65. $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

66. $\begin{cases} 7x-y=8 \\ 3y-3z=0 \\ 5x+z=6 \end{cases}$ 67. $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

Matrisalar yordamida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish.

Qulaylik uchun uchta noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=c_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=c_3 \end{cases}$$

Elementlari noma'lumlarning koeffisiyentlaridan, noma'lumlardan va ozod xadlardan tuzilgan quyidagi matrisalarni ko'raylik.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Bu xolda (1) sistemani qo'yidagicha yozish mumkin.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=C \quad (2).$$

Agar A matrisa maxsusmas matrisa bo'lsa, u xolda unga teskari bo'lgan A^{-1} matrisa mavjud bo'ladi. Shuning uchun (2) ning xar ikkala tomonini A^{-1} ga ko'paytirsak

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}C \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}C$$

Agar $A^{-1}A=AA^{-1}=E$ va $EA=AE=A$ tengliklarni e'tiborga olsak

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}C \Rightarrow EX=A^{-1}C \Rightarrow X=A^{-1}C \qquad (3),$$

(3) (1)-sistemaning yechimini ifodalaydi.

Misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini matrisaviy usulda yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

Yechish. Sistemani matrisa ko'rinishida yozaylik:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A=|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=50$$

Demak A matrisa uchun A^{-1} matrisa mavjud . Berilgan A matrisa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini xisoblab teskari matrisani topamiz

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -5/3 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Endi (3) formulaga asosan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -5/3 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x_1=2$; $x_2=1$; $x_3=3$.

Misollar.

Quyidagi tenglamalar sistemalarini matrisalar hislbi yordamida eching (68-71).

68. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

70. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$

Quyidagi tenglamalar sistemalarini noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulida eching (72-77).

72. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

73. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$

74. $\begin{cases} x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$ 75. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$

76. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$ 77. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \end{cases}$

4-§. VEKTORLIAL ALGEBRA

Vektor.

1-ta'rif. Aniq yo'nalishga ega bo'lgan chekli kesmaga vektor deyiladi.
A nuqtani vektorning boshi, V nuqtani esa vektorning oxiri yoki uchi deyiladi. Odatda vektor $\overline{AB}$ yoki $\vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. Kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektorning modulini ya'ni son qiymatini ifodalaydi va $|\overline{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda yoziladi. Vektor degan so'z asli lotincha bo'lib, ko'chiruvchi, siljituvchi yoki tortuvchi degan ma'noni bildiradi.

2-ta'rif. Agar vektorlar bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi

3-ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlarga komplanar vektorlar deyiladi

4-ta'rif. Har qanday $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning
1) modullari teng bo'lsa;
2) kollinear bo'lsa;
3) yo'nalishlari bir xil bo'lsa , u xolda $\vec{a} = \vec{b}$ deyiladi.

5-ta'rif. Uzunliklari teng bo'lib, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgan vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi. Kollinear so'zi lotincha «com» ya'ni birgalikda yoki umumiy ma'nosidagi va «Linia» ya'ni chizik ma'nosidagi so'zlardan tuzilgan bo'lib, «chiziqdosh» degan ma'noni bildiradi.

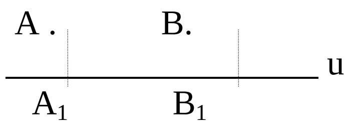
Vektorlar ustida chiziqli amallar.

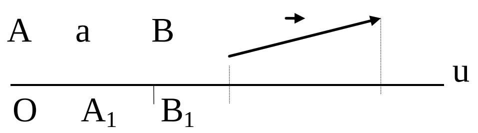
Vektorlarni qo'shish, ayirish amallari o'rta maktab dasturidan ma'lum bo'lgan uchburchak va parallelogramm qoidalariga asosan amalga oshiriladi.

Vektorni songa ko'paytirish. $\vec{a}$ vektorni biror α xaqiqiy songa ko'paytirganda shu $\vec{a}$ ga kollinear bo'lgan $\vec{b}$ vektor xosil bo'lib, uning uzunligi $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$ ga teng bo'lib, yo'nalishi esa $\alpha > 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil , $\alpha < 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ yo'nalishiga qarshi bo'ladi. Vektorlarni songa ko'paytirish qoidasidan ko'rinadiki $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ bo'lsa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear vektorlar va aksincha. Demak $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinear vektorlar bo'lishi uchun $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va kifoya.

Vektorlarning o'qqa proyeksiyasi.

Proyeksiya so'zi lotincha «projectiv» so'zidan olingan bo'lib, «tasvir» yoki «soya» degan ma'noni bildiradi. Biror A nuqtaning u o'qdagi proyeksiyasi deb, shu nuqtadan u o'qqa tushirilgan perpendikulyarning A_1 asosiga aytiladi va qo'yidagicha yoziladi





Pr $_uA = A_1$, pr$_uV = V_1$. $\overrightarrow{AB}$ vektorning o'qdagi geometrik proyeksiyasi deb, vektor boshining proyeksiyasi bo'lgan A_1 dan uchining proyeksiyasi bo'lgan B_1 nuqta tomon yo'nalgan $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorga aytiladi. pr$_u$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

Har qanday vektorning biror o'qdagi geometrik proyeksiyasi vektordir, lekin uning algebraik miqdori biror aniq sondir. Shuning uchun vektorning proyeksiyasi deb shu son qabul qilinadi.

Demak $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning uzunligi $\overrightarrow{AB}$ vektorning u o'qdagi proyeksiyasi deyiladi. Agar A_1 va V_1 nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda x_1, x_2 desak pr$_u$ $\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$ bo'ladi.

Teorema. $\vec{a}$ vektorning u o'qdagi proyeksiyasi shu vektor uzunligini, shu vektor bilan u o'q orasidagi φ burchak kosinus ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$pr_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$$

Vektor koordinatalari deganda vektorning uchi bilan boshining bir xil koordinatalari ayirmalariga shu vektorning koordinatalari deyiladi va qo'yidagicha yoziladi

$$\vec{a} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$$

Vektor koordinatalar kvadratlarining yisindisidan olingan kvadrat ildizga vektor uzunligi deyiladi.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Chiziqli bog'liqli va chiziqli bog'liqsiz vektorlar.

1-ta'rif. Agar $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ (1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ larning xammasi bir paytda nolga teng bo'lmagan xolda o'rinli bo'lsa , u xolda

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektorlarga chiziqli bog'liqli vektorlar deyiladi.

2-ta'rif. Agar (1) tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u xolda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektorlarga chiziqli bog'liqsiz vektorlar deyiladi.

Tekislikdagi xar qanday ikkita vektorning chiziqli bog'liqli bo'lishi uchun ularning kollinear vektorlar bo'lishi zarur va kifoya. Fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liqli bo'lishi uchun, ularning komplanar vektorlar bo'lishi shart.

Tekislikdagi xar qanday ikkita vektorning va fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liksiz vektorlar bo'lishi uchun ularning mos ravishda kollinear va komplanar vektorlar bo'lmasliklari zarur va kifoya.

Vektorni bazislar bo'yicha yoyish.

1-ta'rif. Tekislikdagi bazis deb ikkita kollinear bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektorlarga aytiladi.

1-teorema. Tekislikdagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ bazislar orqali yoyilmasi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

2-ta'rif. Fazodagi bazis deb, undagi xar qanday uchta komplanar bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz bo'lgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarga aytiladi.

2-teorema. Fazodagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazislar orqali yoyilmasi

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$ (2)

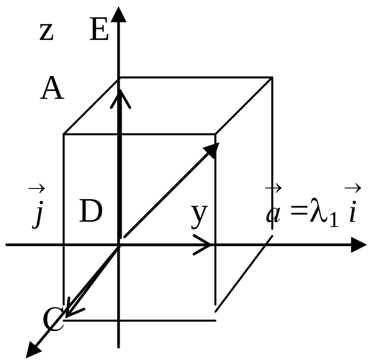
ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

Endi dekart koordinata sistemasidagi bazis va ular bo'yicha vektorlarni yoyishni ko'raylik. Dekart koordinata sistemasida Ox, Ou, Oz o'qlar yo'nalishida mos ravishda uzunliklari birga teng bo'lgan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarni $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ olaylik. Uzunliklari birga teng bo'lgan vektorlarga birlik vektor yoki ort deyiladi. Bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib komplanar bo'lmagani uchun, ya'ni chiziqli bog'liqsiz vektorlar bo'lgani uchun bazislarni tashkil qiladi. Shuning uchun ularga dekart ortogonal bazislar deyiladi.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

$\overrightarrow{OB}$ va $\vec{i}$; $\overrightarrow{OD}$ va $\vec{j}$; $\overrightarrow{OE}$ va $\vec{k}$ vektorlarning kollinear vektorlar ekanligini e'tiborga olsak

$\overrightarrow{OB} = \lambda_1 \vec{i}$; $\overrightarrow{OD} = \lambda_2 \vec{j}$; $\overrightarrow{OE} = \lambda_3 \vec{k}$ kelib chiqadi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda



$pr_{Ox}\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}_x = \lambda_1$, $pr_{Ou}\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{a}_y = \lambda_2$, $pr_{Oz}\overrightarrow{OE} = \boldsymbol{a}_z = \lambda_3$ desak

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ formula kelib chiqadi.

Agar $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini x,y,z desak,

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \{x,y,z\},$$

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

ko'rinishlarda xam yozish mumkin.

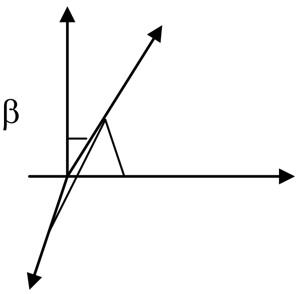
Vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslari.

$\vec{a} = \{x,y,z\}$ vektor Ox,Ou,Oz koordinata o'qlari bilan mos ravishda α, β, γ burchaklar tashkil qilsin.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlari bilan xosil qilgan burchaklar kosinuslariga ya'ni $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ larga $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Proyeksiyalash qoidalaridan foydalansak chizmadan ko'rinadiki x=a_x=$pr_{Ox}\vec{a}$=|$\vec{a}$|cosα , $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{a}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

y=a_y=$pr_{OU}\vec{a}$=|$\vec{a}$|cosβ $\cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{a}|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



x=a_z=$pr_{Oz}\vec{a}$=|$\vec{a}$|cosγ $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{a}|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Misol. A(1,2,3) V(2,4,5) bo’lsa, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning yo’naltiruvchi kosinuslarini toping.

Yechish. $\overrightarrow{AB}$={1;2;2} , |$\overrightarrow{AB}$|=3 , cosα=1/3 ; cosβ=2/3 ; cosγ=2/3.

Kesmani berilgan nisbatda bo’lish.

A(x_1, y_1, z_1) N(x,y,z) B(x_2, y_2, z_2)

x=q ; y= q ;z=q

$$\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} = \lambda \quad => \quad \overrightarrow{AN} = \lambda\,\overrightarrow{NB}.$$

$\overrightarrow{AN}$ *ва* $\overrightarrow{NB}$ vektorlarning kollinearlik shartidan

$\overrightarrow{AN} = \lambda\,\overrightarrow{NB}$ $\Rightarrow$ (x-x_1) $\vec{i}$ +(y-y_1) $\vec{j}$ +(z-z_1) $\vec{k}$ $=\lambda\cdot$[(x_2-x) $\vec{i}$ +(y_2-y) $\vec{j}$ +(z_2-z) $\vec{k}$]

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad ; \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad ; \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

xususiy xolda λ=1 bo’lsa, $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1+z_2}{2}$

Misollar.

78. $\vec{a} = \{6;3;-2\}$ vektorning moduli hisoblansin.

79. $\vec{a}$ vektorning ikkita $x=4,\ y=-12$ koordinatasi berilgan. Agar $|\vec{a}| = 13$ bo’lsa, uning uchinchi z koordinatasi topilsin.

80. Agar ;-1;4} vektorning boshi M(1;2;-3) nuqta bilan ustma-ust tushsa uning oxiri bilan ustma-ust tushuvchi nuqta aniqlansin.

81. Agar $\vec{a} = \{2;\,-3;\,-1\}$ vektorning uchi $(1,-1,\,2)$ nuqta bilan ustma-ust tushsa, uning boshi aniqlansin.

82. $\vec{a} = \{12;\,-15;\,-16\}$ vektorning yo’nltiruvchi kosinuslari hisoblansin.

83. $\vec{a}=\left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};\frac{12}{13}\right\}$ vektorning yunaltiruvchi kosinuslari hisoblansin.

84. Vektor Ox va Oz uklari bilan mos ravishda $\alpha=120^\circ, \gamma=45^\circ$ burchak tashkil etadi. Vektor Oy o'q bilan kanday burchak tashkil etadi?

85. $\vec{a}$ vektor Ox va Ou uklari bilan mos ravishda $\alpha=60^\circ, \beta=60^\circ$ burchak tashkil etadi. $|\vec{a}|=2$ deb, uning koordinatalari hisoblansin.

86. Quyidagilar berilgan $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ va $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. $|\vec{a}-\vec{b}|$ hisoblansin.

87. Quyidagilar berilgan $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ va $|\vec{a}-\vec{b}|=23$. $|\vec{a}+\vec{b}|$ aniqlansin.

88. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vertorlar o'zaro perpendikulyar va $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$. $|\vec{a}+\vec{b}|$ va $|\vec{a}-\vec{b}|$ lar aniqlansin.

89. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vertorlar o'zaro $\varphi=60^\circ$ burchak tashkil etadi, shu bilan birga $|\vec{a}|=5$ va $|\vec{b}|=8$, $|\vec{a}+\vec{b}|$ va $|\vec{a}-\vec{b}|$ lar aniqlansin.

90. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vertorlar yordamida quyidagi vektorlarni yasang:
1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $\overrightarrow{2a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

91. ABS uchburchakda $\overline{AB}=\vec{m}$ va $\overline{AC}=\vec{n}$ bo'lsin.
Quyidagi vektorlarni yasang: 1) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; 2) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; 3) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$;
4) $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$. Masshtab birligi sifatida $\frac{1}{2}$ $|\vec{n}|$ ni olib, quyidagi vektor yasalsin:
5) $|\vec{n}|\vec{m}+|\vec{m}|\vec{n}$; 6) $|\vec{n}|\vec{m}-|\vec{m}|\vec{n}$.

92. $ABCDA^1B^1C^1D^1$ parallepipedda uning qirralari bilan ustma-ust tushuvchi vektorlar berilgan: $AB=\overrightarrow{m}$, $\overline{AD}=\vec{n}$ $AA^1=\vec{p}$. Quyidagi vektorlarni yasang:
1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; 2) $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$
3) $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$; 4) $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$
5) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$/

93. α va β koeffisientlarning qanday qiymatlarida $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ va $\vec{b}=a\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

94. Quyidagi to'rtta nuqtani trapesiyaning uchlari ekanligi tekshirilsin:
$A(3;-1;2)$, $B(1;-2;-3)$, $C(1;-1;-3)$, $D(3;-5;3)$

95. $\vec{a}=\{6;\ \ -2;\ \ -3\}$ vektorning orti topilsin

96. $\vec{a}=\{3;\ \ 4;\ \ -12\}$ vektorning orti topilsin

97. $\vec{a}=\{3;\ \ -5;\ \ 8\}$ va $\vec{b}=\{-1;\ \ 1;\ \ -4\}$ vektor yigindisi va ayirmasining modullari aniqlansin.

98. $\overline{AB}=\{2;\ \ 6;\ \ -4\}$ va $\overline{AC}=\{4;\ \ -2;\ \ 2\}$ vektor ABC uchbukchakning tomolari bilan ustma-ust tushidi. Shu uchburchakning uchlariga qo'yilgan va uning AM, BN, CP, medianalari bilan ustma-ust tushuvchi vektorlarning koordinatalari aniqlansin.

99. Tekislikda uchta $\vec{a}=\{3;-2\}$, $\vec{b}=\{-2;1\}$ va $\vec{c}=\{7;-4\}$ vektor berilgan. Bu vektorlarning har birining, qolgan ikkita vektorni bazis sifatida qabul qilib, yoyilmasi aniqlansin.

100. Uchta $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2\}$ va $\vec{c}=\{-1;7\}$ vektor berilgan. $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorning $\vec{a}$, $\vec{b}$ bazis bo'yicha yoyilmasi topilsin

Skalyar ko'paytma.

1-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, shunday songa aytiladiki, bu son shu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng bo'ladi va odatda $\vec{a}\,\vec{b}$ yoki ($\vec{a}\,\vec{b}$) ko'rinishda yoziladi.

Demak ta'rifga ko'ra $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$; $\varphi=\vec{a}\wedge\vec{b}$

Misol. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=60°$ bo'lsa ($\vec{a}\,\vec{b}$)$=3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=3$

Skalyar ko'paytmani qo'yidagicha xam ta'riflash mumkin.

2-ta'rif. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb, ixtiyoriy bittasining uzunligini ikkinchisining birinchi vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi bilan ko'paytmasiga aytiladi. $\mathrm{pr}_a\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$ yoki $\mathrm{pr}_b\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$ tengliklardan foydalansak

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=|\vec{a}|\mathrm{pr}_a\vec{b}=|\vec{b}|\mathrm{pr}_b\vec{a};\quad \mathrm{pr}_a\vec{b}=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|};\ \mathrm{pr}_b\vec{a}=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Skalyar ko'paytmaning fizik ma'nosi**:** $\vec{F}$ kuchning moddiy nuqtani s masofaga ko'chirgandagi bajargan ishdir. $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$ yoki $A=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$.

Skalyar ko'paytmaning xossalari.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ o'rin almashtirish xossasi.
2. $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{c}$ taqsimot xossasi.
3. $\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})$ guruxlash xossasi.
4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishdagi kollinear vektorlar bo'lsa, $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ chunki cos0=1 .

Agar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, $\vec{a}\,\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$ chunki $\cos180^0=-1$.

5. $\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0=|\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$

6. $\vec{a}$ perpendikulyar $\vec{b}$ bo'lsa , $\vec{a}\,\vec{b}=0$ bo'ladi.

Eslatma. 5 va 6 xossalardan foydalanib $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik vektorlarning skalyar ko'paytmalarini ko'rsak

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{l}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi ravshan.

Skalyar ko'paytmaning koordinatalari orqali ifodasi.

Agar $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni xisoblaylik.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\{ x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$=(eslatmaga ko'ra)= $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Demak koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'lar ekan.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi esa qo'yidagicha xisoblanadi:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{\mathbf{x_1\pm x_2;\ y_1\pm y_2;\ z_1\pm z_2}\}$$

Ikki vektor orasidagi burchak va parallelik, perpendikulyarlik shartlari.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni φ desak bu vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (1)$$

ikki vektor orasidagi burchak kosinusini xisoblash formulasi kelib chiqadi.

Agar $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa,

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (2)$$

Agar $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'lsa, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo'lib $\cos\varphi=0$ bo'ladi va (2) dan

$$x_1x_2+y_1y_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \qquad (3)$$

(3) ikki vektorning perpendikulyarlik sharti. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa, u xolda bu vektorlarning kollinearlik shartidan ya'ni $\vec{\boldsymbol{a}}=\lambda\vec{b}$ dan

$x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=\lambda(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\Rightarrow x_1=\lambda x_2$; $y_1=\lambda y_2$; $z_1=\lambda z_2$.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (5)$$

(5) ikki vektorning parallelik sharti.

Misol. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=\frac{2\pi}{3}$ bo'lsa $(\vec{a}+\vec{b})^2=q$,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}+2(\vec{a}\,\vec{b})+\vec{b}^{\,2}=9-12+16=13$$

Misollar.

101. $\vec{a}$ $\vec{b}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}|=3,$ $|\vec{b}|=4,$ qiymatlarni bilgan hold quyidagilar hisoblansin:
1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^{\,2}$, 3) $\vec{b}^{\,2}$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$;
6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

102. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar; $\vec{c}$ vektor ularning har biri bilan $\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil etadi; $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$ ekani ma'lum bo'lsa, quyidagilar hisoblansin: 1) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; 3) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

103. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ shartni qanoatlantiradigan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ birlik vektor berilgan. $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$ hisoblansin.

104. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ shartni qanoatlantiradigan uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektor berilgan. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ tengliklarni bilgan holda $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$ hisoblansin.

105. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar juft-jufti bilan $60°$ burchak tashkil etadi. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=6$ tengliklarni bilgan holda $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorning moduli aniqlansin.

106. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ tengliklar berilgan α ning qanday qiymatida $\vec{a}+a\vec{b}$, $\vec{a}-a\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi aniqlansin.

107. $\vec{p}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ vektorning $\vec{c}$ vektorga perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

108. $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^{\,2}}$ vektorning $\vec{a}$ vektorga perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

109. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak tashkil etadi; $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ ekanligini bilgan holda, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorlar orasidagi a burchak hisoblansin.

110. Teng yonli, to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchaklaridan o'tkazilgan medianalari orasidagi o'tmas burchak hisoblansin.

111. $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ va $C(0;1;-5)$ nuqtalar berilgan. Quyidagilar hisoblansin: 1) $(2\overline{AB} - \overline{CB})\ (2\overline{CB} - \overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$; 4) $(2\overline{CB}\ \overline{BA})$ va $\overline{AB}(\overline{AC}\ \overline{BC})$ vektorlarning koordinatalari topilsin.

112. $\vec{f} = \{3;\ -2;\ -5\}$ kuch qo'yilgan nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilib, $A(2;\ -3;\ 5;)$ nuqtadan $B(3;\ -2;\ -1)$ nuqtaga siljidi. $\vec{f}$ kuchning bajargan ishi hisoblansin.

113. Bir nuqtaga qo'yilgan uchta kuch berilgan: $\vec{M} = \{3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{N} = \{2;\ 3;\ -5\}$ va $\vec{P} = \{-3;\ -2;\ 4\}$. Shu kuchlarning teng ta'sir etuvchisining qo'yilish nuqtasi to'g'ri chizik bo'ylab harakatlanib, $M_1(5;\ 3;\ -7)$ holatdan $M_2(4;\ -1;\ -4)$ holatga ko'chganda, teng ta'sir etuvchi bajargan ish hisoblansin.

114. To'rtburchakning uchlari A(1; -2; 2), B (1; 4; 0), C (-4; 1; 1) va D(-5; -5; 3) nuqtalarda yotadi. Uning AC va BD diagonallari o'zaro perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

115. α ning qanday qiymatida $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi aniqlansin.

116. $\vec{a} = \{2;\ -4;\ 4\}$ va $\vec{b} = \{-3;\ 2;\ 6\}$ vektorlar tashkil etgan burchakning kosinusi hisoblansin.

117. Uchburchakning uchlari A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0) va C (3; -2; 1) nuqtalarga yotadi. Uning B uchidagi ichki burchagi aniqlansin.

118. Uchburchakning uchlari A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0) va C(3; -2; 1) nuqtalarga yotadi. Uning A uchidagi takshi burchagi aniqlansin.

119. Uchlari A(1; 2; 1), B(3; -1; 7), C(7; 4; -2) bo'lgan uchbarchakning ichki burchakni hisoblash yordamida uchburchakning teng yonli ekanini isbotlang.

120. $\vec{a} = \{6;\ -8;\ -7.5\}$ vektorga kollinear bo'lgan $\vec{x}$ vektor Oz o'q bilan o'tkir burchak tashkil etadi. $|\vec{x}| = 50$ ekanligini bilgan holda, uning koordinataltri aniqlansin.

121. $\vec{a} = \{2;\ 1;\ -1\}$ vektorga kollinear bo'lgan hamda $\vec{x}\vec{a} = 3$ shartni qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

122. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan $\vec{x}$ vektor Oy o'q bilan o'tmas burchak tashkil qiladi. $|\vec{x}|=14$ ekanligini bilgan holda, uning koordinatalari aniqlansin.

123. $\vec{a}=\{2;\ 3;\ -1\}$ va $\vec{b}=\{1;\ -2;\ 3\}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan va $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$ shartni qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

124. $\vec{a}=\{3;\ -1;\ 5\}$ va $\vec{b}=\{1;\ 2;\ -3\}$ vektorlar berilgan. OZ o'qqa perpendikulyar bo'lgan va $\vec{x}\vec{a}=9, \vec{x}\vec{b}=-4$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektor topilsin.

125. Uchta $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ vektor berilgan. $\vec{x}\vec{a}=-5, \vec{x}\vec{b}=-11, \vec{x}\vec{c}=20$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektor topilsin

Vektor ko'paytma.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, qo'yidagicha aniqlanadigan shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

1. $\vec{c}$ vektorning moduli son jixatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning yuziga teng $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $\varphi=\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$

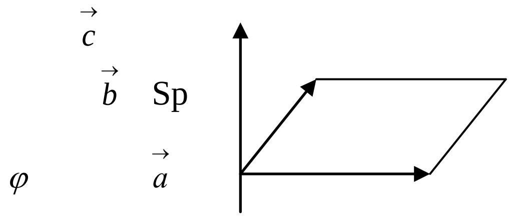
2. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$.

3. $\vec{c}$ vektorning musbat yo'nalishi shundayki, agar $\vec{c}$ vektorning uchidan (oxiridan) qaralsa, $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa masofa soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

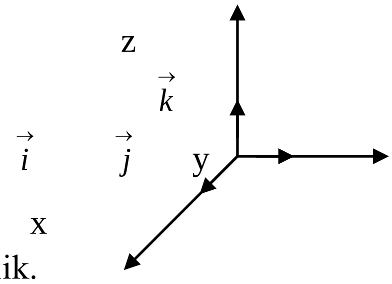
Vektor ko'paytma $[\vec{a}\ \vec{b}]$ yoki $\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishlarda belgilanadi.

$S_P=|\vec{c}|=|[\vec{a}\ \vec{b}]|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

$S_{uch}=\frac{1}{2}|[\vec{a}\ \vec{b}]|=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$



Vektor ko'paytmaning xossalari.



1. $[\vec{a}\ \vec{b}]=-[\vec{b}\ \vec{a}]$.
2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa , $\vec{a}\times\vec{b}=0$.
3. $\lambda(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$
4. $\vec{\boldsymbol{a}}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

Endi 1,2 xossalardan foydalanib $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik vektorlarning vektor ko'paytmalarini chiqaraylik.

2-xossaga. ko'ra $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=0$ ekanligi ravshan.

$$|\vec{c}|=|[\vec{i}\ \vec{j}]|=|\vec{i}||\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1$$

Ikkinchi tomondan $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{c}$ bu vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lib z o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan va $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ gacha eng qisqa masofa soat strelkasiga qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak bu vektor $\vec{c}=\vec{k}$ ekan, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ xuddi shuningdek qolganlarini yozsak.

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\ ,\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\ ,\ \vec{j}\times\vec{j}=0,$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\ ,\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{k}=0.$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko'paytmasi.

$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{a}\times\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=(y_1z_2-z_1y_2)$

$\vec{i}+(-x_1z_2+z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

ko'rinishda xam yozish mumkin.

Misol. $\vec{a}=\{2;5;7\}$, $\vec{b}=\{1;2;4\}$, $|[\vec{a}\ \vec{b}]|=q$

$$\vec{a}\times\vec{b}=6\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\ ;\ |[\vec{a}\ \vec{b}]|=\sqrt{36+1+1}=\sqrt{38}$$

Uchta vektorning aralash ko'paytmasi.

$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ va $\vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$

vektorlar berilgan bo'lsa, bu vektorlarning aralash ko'paytmasi deb , $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor ko'paytma bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasiga aytiladi va odatda $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ ko'rinishda yoziladi

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k},\quad \vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi qirralari berilgan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning modullaridan tashkil topgan parallelopepedning xajmini ifodalaydi.

Fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning komplanar vektorlar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nol bo'lishi zarur va kifoya.

Misol. Uchlari O(0;0;0) , A(5;2;0), B(2;5;0) , C(1;2;4) nuqtalarda bo'lgan parallelopipedning xajmini toping.

$$V=(\vec{OA}\times\vec{OB})\cdot\vec{OC}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=84 \text{ kub birlik.}$$

Misollar.

126. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi=\pi/6$ burchakni hosil qiladi. Agar $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=5$ bo'lsa $\left|[\vec{a}\ \ \vec{b}]\right|$ ni hisoblang.

127. Quyidagi kattaliklar berilgan: $|\vec{a}|=10, |\vec{b}|=2$ va $\vec{a}\vec{b}=12.$ $\left|[\vec{a}\ \ \vec{b}]\right|$ ni toping.

128. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyardir. Agar $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$ bo'lsa, quyidagilar hisoblansin: 1) $\left|[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]\right|$; 2) $\left|[(3\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})]\right|$

129. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ ekanligini bilgan holda quyidagilarni hisoblang: 1) $[\vec{a}\ \ \vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})]$; 3) $[(\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})]$

130. $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ shartni qanoatlantiradi. $[\vec{a}\ \ \vec{b}]=[\vec{b}\ \ \vec{c}]=[\vec{c}\ \ \vec{a}]$

Tenglik o'rinli ekanini isbotlang.

131. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar uchun $\left[\vec{a}\ \ \vec{b}\right]=\left[\vec{c}\ \ \vec{d}\right], \left[\vec{a}\ \ \vec{c}\right]=\left[\vec{b}\ \ \vec{d}\right]$ tengliklar o'rinli.

132. $\vec{P}=\{2;\ \ -4;\ \ 5\}$ kuch $M_0(4;\ \ -2;\ \ 3)$ nuqtaga qo'yilgan. $\vec{P}$ kuchning A (3; 2; -2) nuqtaga nisbatan momentini aniqlang.

133. $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ va $C(5;2;6)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchaqning yuzasini hisoblang.

134. Uchburchakning uchta uchi $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ va $C(1;3;-1)$ lar berilgan. Uchburchakning B uchidan AC tomoniga balandlik tushirilgan. Ushbu balandlikni uzunligi topilsin.

135. $\vec{a}=\{2;-1;1\}$ va $\vec{b}=\{2;3;6\}$ vektorlar orasidagi burchak sinusi hisoblang.

136. $\vec{x}$ vektor $\vec{a}=\{4;-2;-3\}$ va $\vec{b}=\{0;1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lib, OY o'qi bilan o'tmas burchak hosil qiladi. $\vec{x}$ vektorning uzunligi $|\vec{x}|=26$, uning koordinatlarini aniqlang.

137. $\vec{m}$ vektor OZ o'qiga hamda $\vec{a}=\{8;-15;3\}$ vektorga perpendikulyar va OX o'qi bilan o'tkir burchak tashkil etadi. $|\vec{m}|=51$ ekani ma'lum bo'lsa, uning koordinatlarini toping.

138. $\vec{x}$ vektor $\vec{a}=\{2;-3;1\}$ va $\vec{b}=\{1;-1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar hamda $\vec{x}=\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$ tenglikni qanoatlantiradi. $\vec{x}$ vektorni aniqlang.

139. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar va o'ng uchlikni tashkil etadi. Ularning uzunliklari $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ berilgan. $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ hisoblansin.

140. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 30 ni tashkil qiladi. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{c}|=3$ bo'lsa, $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ ni toping.

141. Ayniyatni isbotlang: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=2\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

142. Ayniyatni isbotlang: $\vec{a}\vec{b}\left(\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right)=\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$, bu erda λ va μ-ixtiyoriy sonlar.

143. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorning komplanar bo'lishi uchun $\overrightarrow{\alpha a}+\overrightarrow{\beta b}+\overrightarrow{\gamma c}=0$ shartning bajarilishi zarur va etarli ekanini isbotlang. Bunda α, β, γ sonlarning kamida bittasi noldan farqli.

144. Quydagi uchta vektor berilgan: $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$, $\vec{c}=\{3;-2;5\}$ $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ hisoblansin.

145. Uchlari $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ va $D(4;1;3)$ nuqtalardan iborat tetraedrning hajmi hisoblansin.

146. Uchburchakning uchlari berilgan : $A(2;-1;-3)$, $B(1;2;-4)$, $C(3;-1;-2)$, $\vec{h}$ vektor berilgan uchburchakning A uchidan uning qarama-qarshi tomoniga tushirilgan balandligiga kollineardir. $\vec{h}$ vektor OY o'qi bilan o'tmas burchak tashkil qiladi va moduli $2\sqrt{34}$ ga teng. $\vec{h}$ vektorning koordinatlarini aniqlang.

147. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar noldan farqli. Berilgan vektorlar o'zaro qanday joylashganda $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]=\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$ tenglik o'rinli bo'ladi?

5-§. TEKISLIKDAGI TO'G'RI CHIZIQ.

To'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi.

Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan φ $(\varphi \neq \frac{\pi}{2})$ burchak tashkil qilib, Oy o'qidan b kesma ajratib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish degan so'z undagi ixtiyoriy M(x,y) nuqta koordinatalarini o'zaro bog'lovchi tenglamani topish demakdir.

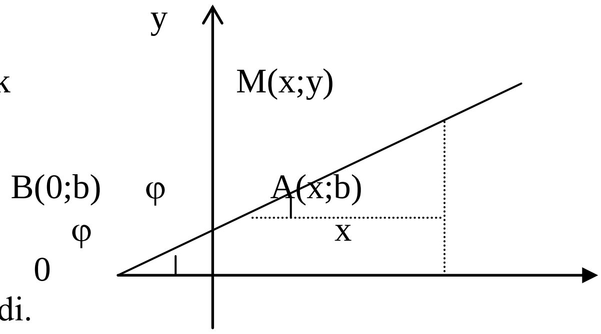
$OB = b$, $AM = y - b$, $AB = x$, ΔABM dan

$tg\varphi = \frac{y-b}{x}$ $\Rightarrow$ y=xtgφ+b , tgφ=k desak

u=kx+b. (1)to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi deyiladi.

k=tgφ (2) to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti deyiladi.

k=0 bo'lsa, u=b; b=0 bo'lsa u=kx bo'ladi.



Misol. b=-2, k=45° bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi y=x-2 bo'ladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Ax+Bx+C=O (1) ko'rinishdagi birinchi darajali tenglamaga to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

1. Agar (1) da C=0 bo'lsa, Ax+Bx=0 bo'lib koordinata boshidan o'tgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

2. Agar (1) da A=0 bo'lsa, By+C=0* y=-C/B bu esa (0,-C/B) nuqtadan o'tib Ox o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqdir.

3. Agar B=O bo'lsa, $x = -\frac{C}{A}$ bo'lib Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ladi.

4. C=0, B=0 bo'lsa, Ax=0 $\Rightarrow$x=0 - bu Oy o'qining tenglamasi.

5. S=0 A=0 bo'lsa, Vy=0 $\Rightarrow$ y=0 - bu Ox o'qining tenglamasi.

Misol. 2x+3u +7=0 umumiy tenglamani burchak koeffisyentli kurinishda yozing.
2x+3u+7=0, 3y=-2x-7,y=-2/3x-7/3; k=-2/3 ; b=-7/3.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.

Bir - biri bilan kesishadigan L_1, L_2 to'g'ri chiziqlarning tenglamalari mos ravishda

$L_1: y = k_1x + b_1$

$L_2: y = k_2x + b_2$

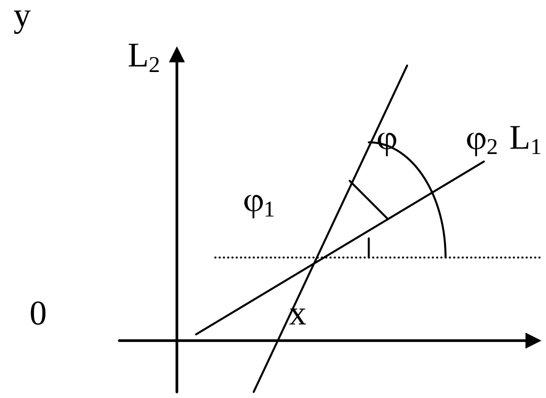
bo'lsin. tg φ=q

Chizmadan $\varphi_2 = \varphi + \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}$$

$tg\varphi_1 = k_1$, $tg\varphi_2 = k_2$

ekanliklarini e'tiborga olsak



$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$ (1) ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Agar $0 < \varphi < 90^o$ bo'lsa , $tg\varphi > 0$; $90^o < \varphi < 180^o$ bo'lsa , $tg\varphi < 0$.

Agar L_1, L_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa $\varphi=0$ bo'lib $tg\varphi=0$ bo'ladi.

Bu xolda (1) dan $k_2 - k_1 = 0$ $\boxed{\mathbf{k_2 = k_1}}$ **(2)**

(2)-ikki to'g'ri chizikning parallellik sharti.

Agar L_1, L_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, $\varphi=90$ bo'lib $\varphi_2 = \varphi + \varphi_1 = 90 + \varphi_1$; $tg\varphi_2 = tg(90+\varphi_1) = -\frac{1}{tg\varphi_1}$; $tg\varphi_2 = -\frac{1}{tg\varphi_1}$, $\mathbf{k_2} = -\frac{1}{k_1}$ **yoki**

$\boxed{\mathbf{k_1k_2 = -1}}$ (3)

(3) ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti.

Misol. 1)3x+u-6=0 x+2u+1=0 tugri chiziklar orasidagi burchak $\varphi = 45^o$.

2) $M_1(-3;1)$ nuktadan o'tib 2x+u-3=0 to'g'ri chiziqga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi x-2u+1=0 bo'ladi.

Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

xOy tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqga perpendikulyar bo'lgan $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ vektor berilgan bo'lsin. $\vec{N}$ vektorga L to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi. L to'g'ri chiziqning xOy tekislikdagi xolati $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va $\vec{N} = \{A,V\}$ normal vektorlarning berilishi bilan to'liq aniklanadi.

L to'g'ri chiziqda biror M(x,y) nuqta olaylik va bu nuqta kordinatalarini o'zaro bog'lovchi shu to'g'ri chiziqning tenglamasini chiqaraylik.

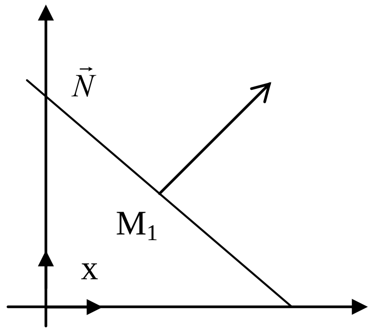
$\vec{N}$ =A $\vec{i}$ +B $\vec{j}$ va $\overrightarrow{M_1N}$ =(x-x_1) $\vec{i}$ +(y-y_1) $\vec{j}$

vektorlar perpendikulyar bo'lgani uchun ularning skalyar ko'paytmasi nol bo'ladi.

$\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0$ dan (A $\vec{i}$ +B $\vec{j}$)((x-x_1) $\vec{i}$ +(y-y_1) $\vec{j}$)=0,

A(x-x_1)+B(y-y_1)=0

izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi.



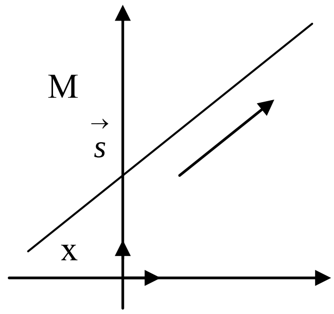
Misol. M(-1,3) nuqtadan o'tib $\vec{N}$ =2 $\vec{i}$ -3 $\vec{j}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi 2x-5u+17=0 bo'lishi ravshan.

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

XOy tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan biror $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqga parallel bo'lgan yoki ustma-ust tushgan $\vec{s}=m\vec{i}+n\vec{j}$ vector berilgan bo'lsin. $\vec{s}$ vektorni L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

L to'g'ri chiziqning xolati $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va

$\vec{s}$ = {m,n} larning berilishi bilan to'la aniqlanadi.



L ustida M(x,y) nuqta olsak $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear bo'lgani uchun

$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\vec{s}\Rightarrow$ (x-x_1) $\vec{i}$ +(y-y_1) $\vec{j}$ = λ(m $\vec{i}$ +n $\vec{j}$),

$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$ - to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi

Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

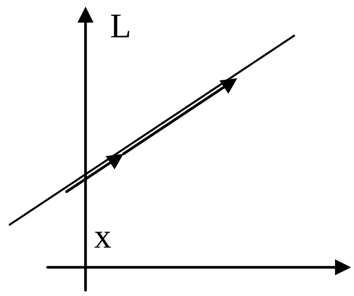
Tekislikda berilgan $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik. L da biror M(x,y) nuqta olib

vektorni L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M}$

vektori sifatida olsak

$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{M_1M_2}\Rightarrow$, (x-$x_1$) $\vec{i}$ +(y-y_1) $\vec{j}$ =

$=\lambda[(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j})\quad\Rightarrow\quad\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$



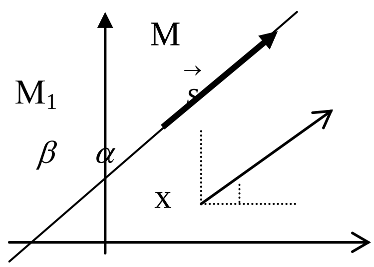
-berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Misol. $M_1(1,2)$, M(2,3) nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

x+3y-7=0

Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

xOy tekisligidagi Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan φ burchak tashkil qiluvchi biror L to'g'ri chizik berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning xolati shu φ burchak bilan shu to'g'ri chiziqda yotuvchi biror $M_1(x_{1i}y_1)$ nuqtaning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb,



Shu L to'g'ri chiziqga parallel bo'lgan

$\vec{s} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{l}\sin\alpha$; $|\vec{s}|=1$; $[\cos\alpha=\cos(90^o-\alpha)=\sin\alpha]$

birlik vektorni olaylik. L to'g'ri chiziq ustida biror M(x,y) nuqta olsak $\vec{s}$ va $\overrightarrow{M_1M}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lgani uchun

$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\cdot\vec{s} \Rightarrow (x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} = \lambda\cdot(\vec{i}\cos\alpha + \vec{l}\sin\alpha)$

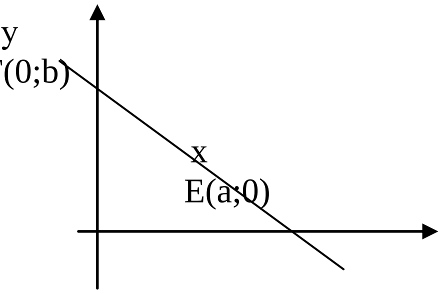
$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda\cos\alpha \\ y - y_1 = \lambda\sin\alpha \end{cases} \quad \lambda = \frac{x-x_1}{\cos\alpha}, \quad \lambda = \frac{y-y_1}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad y - y_1 = k(x - x_1)$$

$(k = tg\alpha)$

Bu tenglamaga berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.

Misol. M(2,-1) nuqtadan o'tgan Ox o'qi bilan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping. $k = tg\alpha = \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$.

To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi.



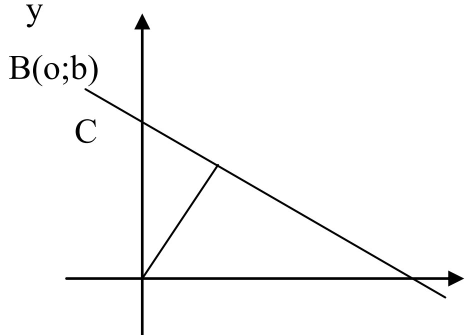
Koordinata o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalarni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini chiqaraylik.
Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini Ax+Bu+C=0 (1) ko'rinishda olaylik.
$A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, deb, Ye(a,0), F(0,b) nuqtalar to'g'ri chiziqda yotgani uchun,bu nuqtalar koordinatalarini (1) ga qo'ysak

$\boldsymbol{A = -\frac{c}{a}}$, $\boldsymbol{B = -\frac{c}{b}}$ kelib chiqadi. Bularni (1) ga quysak

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2)$$

to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi kelib chiqadi.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.



Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (1) ko'rinishida olaylik.
Koordinata boshidan to'g'ri chiziqgacha

bo’lgan masofani OC=p deylik. P

p masofa va α burchaklar berilgan bo’lsin. α x

u xolda AOS uchburchakdan , $a = \dfrac{p}{\cos\alpha}$ 0 A(a;0)

VOS uchburchakdan $\dfrac{p}{OB} = \cos(90^0 - \alpha) \Rightarrow b = \dfrac{p}{\sin\alpha}$

topilgan a,b larni (1) ga qo’ysak

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad (2)$$

to’g’ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

Agar to’g’ri chiziqning tenglamasi Ax+Vy+S=0 (3) umumiy ko’rinishda berilgan bo’lsa , uni normal ya’ni (2) ko’rinishga keltirish uchun (3) ning xar ikkala tomonini normallovchi ko’paytuvchi deb ataluvchi

$\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ ga ko’paytirish kifoya . Ildiz oldidagi ± ishora (3) dagi S ning ishorasiga teskari olinadi.

$\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ (4) normal tenglama (2) bilan (4) ni solishtirsak

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \ \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \ -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

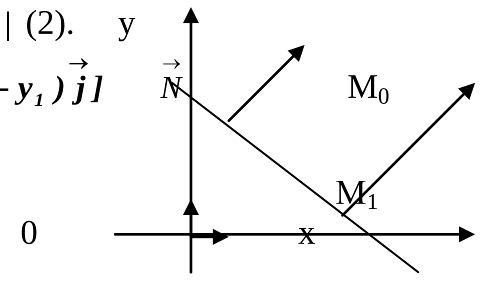
Misol. 4x-3u-10=0 to’g’ri chizikning umumiy tenglamasini normal ko’rinishga keltiring.

Yechish. $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - 2 = 0$ -bu normal tenglama.

Nuqtadan to’g’ri chiziqgacha bo’lgan masofa.

Tekislikda tenglamasi Ax+Vy+S=0 (1) bo’lgan L to’g’ri chiziq va $M_o(x_o,y_o)$ nuqta berilgan bo’lsin. M_o nuqtadan to’g’ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning to’g’ri chizik bilan kesishgan nuqtasini $M_1(x_1,y_1)$ deylik. Bu xolda berilgan $M_o(x_o,y_o)$ nuqtadan L to’g’ri chiziqgacha bo’lgan masofa $\vec{d} = \overrightarrow{M_1M_0} = (x_0-x_1)\vec{i} + (y_0-y_1)\vec{j}$ vektorning moduliga teng bo’ladi. $\vec{d}$ va $\vec{N}$ vektorlar kollinear vektorlar bo’lgani uchun ular orasidagi burchak yoki 0 yoki π ga teng bo’lib, $\cos\varphi = \pm 1$ bo’ladi.

Shuning uchun $\vec{N}\cdot\vec{d} = \pm|\vec{N}|\cdot|\vec{d}|\cos\varphi \Rightarrow \vec{N}\cdot\vec{d} = |\vec{N}|\cdot|\vec{d}|$ (2).



Ikkinchi tomondan $\boldsymbol{\vec{N}\cdot\vec{d} = (A\vec{i} + B\vec{j})[(x_0 - x_1)\vec{i} + (y_0 - y_1)\vec{j}]}$

$\vec{N}\cdot\vec{d} = Ax_0 + By_o - (Ax_1 + By_1)$ (3)

$M_1(x_1,y_1)$ nuqta L to’g’ri chiziqda yotgani uchun

$x_1 + By_1 + C = 0$, $C = -(Ax_1 + By_1)$ bu xolda (3) qo’yidagicha bo’ladi.

$\vec{N}\cdot\vec{d}$ =Ax$_0$+By$_0$+C (4), $|\vec{d}|$=d, $|\vec{N}|=\sqrt{\boldsymbol{A^2}+\boldsymbol{B^2}}$ L larni e'tiborga olib (2) va (4) larning o'ng tomonlarini tenglashtirsak

$\pm|\vec{N}\cdot\vec{d}|$=Ax$_0$+By$_0$+C $\Rightarrow d=\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ ёки $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

izlanayotgan masofa formulasi kelib chiqadi.

Misol. Uchlarining koordinatalari A(1,2);V(-2,1);S(2;3) bo'lgan uchburchakning A uchidan tushirilgan balandlikning uzunligini toping.

Yechish.VS: x-2u+4=0 A nuqtadan VS to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa

$$d=\frac{|1\cdot 1-2\cdot 2+4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}45$$

Misollar.

148. $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$,$M_4(-3;-5)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ nuqtalarning qaysilarning $2x-3y-3=0$ to'g'ri chiziqda yotishi, qaysilari yotmasligi aniqlansin.

149. P_1, P_2, P_3, P_4 va P_5 nuqtalar $2x-3y-6=0$ to'g'ri chiziqda joylashgan; ularning abssissalari mos ravishda 4,0,2,-2 va -6 sonlarga teng. Bu nuqtalarning ordinatalari aniqlansin.

150. $2x-3y-12=0$ to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlansin va shu to'g'ri chiziq chizmada yasalsin.

151. Ikkita $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin.

152. ABC uchburchakning AB, BC va AC tomonlari mos ravishda $4x-3y-5=0$ $x-3y+10=0$; $x-2=0$ tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini koordinatlarini aniqlansin.

153. Parallelogrammning ikkita tomonini tengmalarini $8x+3y+1=0$; $2x+y-1=0$ va uning diagonalaridan berining tenglamasi $3x+2y+3=0$ berilgan. Shu parallelogrammning uchlarini koordinatlari aniqlansin.

154. Uchburchakning tomonlari $x+5y-7=0$; $3x-2y-4=0$; $7x+y+19=0$ to'g'ri chiziqlarda yotadi. Uning S yuzi hisoblansin.

155. Burchak koeffisienti k va Oy o’qdan kesgan kesmasi b bo’lgan to’g’ri chiziqning tenglamasi tuzilsin va chizmasi yasalsin:

1) $k=\frac{2}{3}$, $b=3$; 2) $k=3$, $b=0$; 3) $k=0$, $b=-2$; 4) $k=-\frac{3}{4}$, $b=0$

5) $k=-2$, $b=-5$; 6) $k=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$;

156. Quydagi to’g’ri chiziqlarning har biri uchun k burchak kooeffisient va Oy o’qdan ajratilgan. B kesma aniqlansin:
1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$; 4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$;

157. Ushbu $5x+3y-3=0$ to’g’ri chiziq berilgan. Bu to’g’ri chiziqqa parallel va perpendikulyar bo’lgan to’g’ri chiqziqlarning burchak koeffisientlari aniqlansin.

158. To’g’ri to’rtburchagning ikkita tomonining tenglamalari $2x-3y+5=0$; $3x+2y+15=0$ va uning uchlaridan biri $A(2;-3)$ berilgan. Shu to’g’ri to’rtburchagning ikkita tomonining tengmalari tuzilsin.

159. To’g’ri to’rtburchagning ikkita tomonining tenglamalari $x-2y=0$; $x-2y+15=0$ va uning diagonallaridan birining tenglamasi $7x+y-15=0$ berilgan. To’g’ri to’rtburchagning uchlari topilsin.

160. Ushbu $P(-6;4)$ nuqtaning $4x-5y+3=0$ to’g’ri chiziqdagi proeksiyasi topilsin.

161. Ushbu $2x+3y-3=0$ to’g’ri chiziqqa nisbatan $P(-5;13)$ nuqtaga simmetrik bo’lgan Q nuqta topilsin.

162. Berilgan ikkita nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziqning burchak koeffisienti k hisoblansin:
a) $M_1(2;5)$, $M_2(3;2)$; b) P(-3;1), Q(7;8); v) A(5;-3), B(-1;6).

163.Uchburchagning A(2;-2), B(3;-5) va C(5;7) uchlari berilgan. Uning A uchidagi ichki burchagining bissektrisasiga C uchidan tushirilgan perpendikulyarining tenglamasi tuzilsin.

164. Uchlari A(3;2), B(5;-2),C(1;0) bo’lgan uchburchaginin tomonlarini va medianalarini tenglamalari tuzilsin.

165. $M_1(-1;2)$ va $M_2(2;3)$ nuqtalar orqali to’g’ri chiziq o’tkazilgan. Shu to’g’ri chiziqning koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlansin.

166. ABCD parallelogrammning ikkita qo'shni A(-3;-1) va B (2;2) uchlari hamda uning diagonallarini kesishish nuqtasi Q(3;0) berilga. Shu parallelogrammning tomonlarini tenglamalari tuzilsin.

167. To'g'ri to'rtburchagning ikkita tomonini tenglamalari $5x+2y-7=0$; $5x+2y-36=0$ va uning diagonali $3x+7y-10=0$ berilgan. Shu to'g'ri to'rtburchagning qolgan tomonlari va ikkinchi diagonalini tenglamalari tuzilsin.

168. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi φ burchak aniqlansin.
1) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$; 2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$.

169. To'g'ri chiziqlar berilgan:
1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$;

4) $3x-5y-2=0$; 5) $5x+2y-1=0$. Ular uchun "kesmalardagi" tenglamalar tuzilsin va bu to'g'ri chiziqlar chizmada yasalsin.

170. C(1;1) nuqtadan o'tib, koordinat burchakdan yuzi 2 kv. birlikka teng bo'lgan uchburchak kesuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

171. B(5;5) nuqtadan o'tib, koordinat burchakdan yuzi 50 kv. birlikka teng uchburchak kesuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

172. To'g'ri chiziqlarning quydagi tenglamalarini qaysilari normal tenglama ekanligi aniqlansin:
1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; 2) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$; 3) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$;
4) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$; 5) $-x+2=0$; 6) $x-2=0$;
7) $y+2=0$; 8) $-y-2=0$.

173. Quyidagi hollarning har birida to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin:
1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) $12x-5y+13=0$; 4) $x+2=0$;
5) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

6-§. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR.

Aylana.

Ta'rif. Berilgan nuqtadan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga aylana deyiladi.

Berilgan S(a,b) nuqtadan R masofada turgan M(x,y) nuqtani olaylik. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \Rightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$ - markazi S(a,b) nuqtada radiusi R bo'lgan aylana tenglamasi . Agar S(0,0) bo'lsa , $x^2+y^2=R^2$ bo'ladi.

Misol. $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$ aylananing markazi va radiusini toping.

$(x-2)^2+(y+\frac{5}{4})^2=2+4+\frac{25}{16}=\frac{121}{16} \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+\frac{5}{4})^2=\frac{121}{16}$; $R=\frac{11}{4}$; $C(2;-\frac{5}{4})$.

Ellips va uning tenglamasi.

1-ta'rif. Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalarining yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga ellips deyiladi.

Fokuslarini $F_1(-c.0)$, $F_2(c,0)$ desak , ular orasidagi masofa 2c bo'lib o'zgarmas masofani 2a deb belgilasak 2a>2c bo'ladi.

Shartga ko'ra

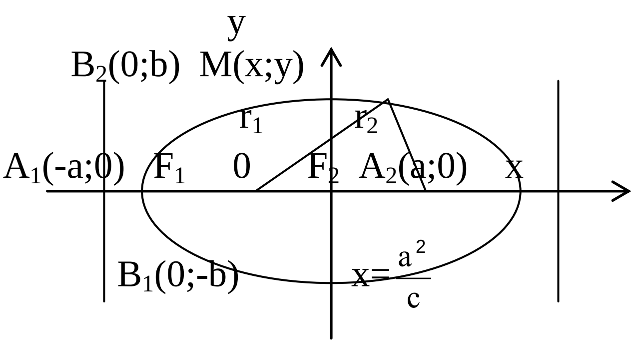
$F_1M+F_2M=2a \quad \Rightarrow$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Rightarrow$

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$a^2-c^2=b^2$ desak $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \Rightarrow$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x=-\frac{a^2}{c}$



Ellips shaklini birinchi chorakda ko'raylik.1) ni y ga nisbatan yechsak

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ - bundan ko'rinadiki 1-chorakda

x 0 dan a gacha o'sganda $(0\le x\le a)$, y b dan 0 gacha kamayadi $(b\le y\le 0)$. Demak ellipsning 1-chorakda yotgan qismi $A_2(a,0)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalar orasidagi yoydan iborat bo'lar ekan. Ellipsning simmetrikligidan $A_1(-a,0)$, va $B_1(0,-b)$ nuqtalarning kelib chiqishi ravshan. $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$ larga mos ravishda ellipsning katta va kichik o'qlari deyiladi, a va b larga esa katta va kichik yarim o'qlar deyiladi.

2-Ta'rif. Ellips fokuslari orasidagi masofaning katta o'qiga nisbati ellipsning eksiyentrisiteti deyiladi va odatda ye xarfi orqali belgilanadi.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}\ ;\ c<a,\ c^2=a^2-b^2 \ \Rightarrow\ e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

3-Ta’rif. Ellipsning biror nuqtasidan fokuslarigacha bo’lgan masofa shu nuqtaning radius vektori deyiladi. $r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,
$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ yoki $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$ ko’rinishda bo’ladi.

$x = \pm\frac{a^2}{c}$ to’g’ri chiziqlarga ellipsning direktrisalari deyiladi. Ellipsning biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqtasiga o’tkazilgan urinma va normal tenglamalari

$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ urinma, $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ normal ko’rinishlarda bo’ladi.

Misollar. 1.) 2s=6, 2b=8. Ellips tenglamasini tuzing. c=3, b=4 , $a^2 = b^2 + c^2 = 25$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, 2) $3x^2 + 5y^2 - 16 = 0$; a=q ;b=q ; $F_1(-c; 0)$=q .

$a^2 = \frac{16}{3}$; $b^2 = \frac{16}{5}$; $c^2 = \frac{32}{15}$; $F_1(-\sqrt{\frac{32}{15}}; 0)$, $F_2(\sqrt{\frac{32}{15}}; 0)$

Giperbola va uning tenglamasi.

Ta’rif. Har bir nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo’lgan masofalari ayirmasining absolyut qiymati o’zgarmas bo’lgan nuqtalarning geometrik o’rniga giperbola deyiladi.

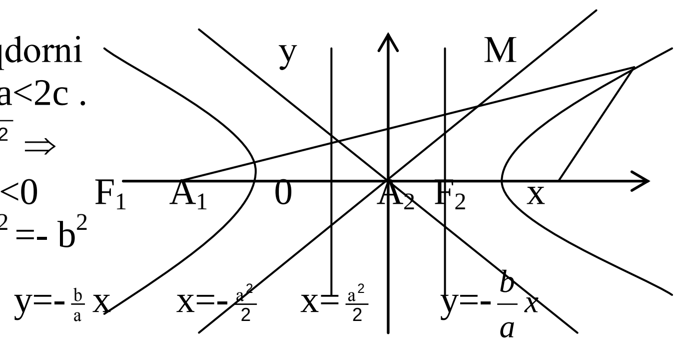
Fokuslari $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ bo’lsa ular orasidagi masofa $F_1F_2 = 2c$ bo’ladi. O’zgarmas miqdorni esa 2a desak $|F_1M - F_2M| = 2a$; $2a < 2c$.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, $a^2 - c^2 < 0$

chunki $a < c$, shuning uchun $a^2 - c^2 = -b^2$

desak $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)



giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi

(1) ni y ga nisbatan yechsak $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ bo’ladi. Birinchi chorakda

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ bo’lib , x a dan cheksizgacha o’sganda y 0 dan cheksizgacha o’sadi. Demak, bu xolda giperbolaning birinchi chorakdagi qismi A_2M yoydan iborat bo’ladi. Giperbola koordinatalar o’qiga simmetrik joylashgani uchun uning qolgan choraklardagi geometrik o’rni chizmadagi kabi bo’ladi.

Ox-xaqiqiy o’q , Oy-mavxum o’q deyiladi.

$A_1A_2 = 2a$ ga giperbolaning xaqiqiy o’qi, A_1, A_2 nuqtalarga giperbolaning uchlari deyiladi. $B_1B_2 = 2b$ ga giperbolaning mavxum o’qi deyiladi, chunki u giperbola bilan kesishmaydi.

a va b larga mos ravishda giperbolaning xaqiqiy va mavxum yarim o'qlari deyiladi. Giperbola fokuslari orasidagi masofaning xaqiqiy o'qga nisbati giperbolaning ekssyentrisiteti deyiladi .

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}\ ;\ \Rightarrow\ e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

tenglamalari $x=\pm\frac{a^2}{c}$ bo'lgan to'g'ri chiziqlarga giperbolaning direktrisalari deyiladi. Giperbolaning $M(x_1, y_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari qo'yidagicha bo'ladi.

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ - urinma },\ y-y_1=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1) \text{ - normal}$$

giperbolaning asimptotalari.

(1) tenglamani y ga nisbatan yechib $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ grafigini birinchi chorakda ko'raylik. Bu funksyaning 1-chorakdagi grafigining nuqtalari koordinata boshidan yetarli darajada uzoqlashgan sari tenglamasi $y=\frac{b}{a}x$ bo'lgan to'sri chiziqdagi $M_1(x_1,y_1)$ va giperboladagi $M(x,y)$ nuqtalar ordinatalarining ayirmasini ko'rsak

$$y_1-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow y^1-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

bundan ko'rinadiki x o'sganda $y-y_1\to 0$,chunki surat o'zgarmas , maxraji esa x o'sgan sari o'sadi . Giperbola koordinata o'qlariga simmetrik bo'lgani uchun $y=-\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq xam mavjud bo'ladi. Shunday qilib $y=\pm\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlarga giperbolaning asimptotalari deyiladi.

Misollar. 1. $5x^2-9y^2-45=0$ giperbolaning ekss yentrisiteti va asimptotalarini toping.

Yechish. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$; $a^2=9$, $b^2=5$, $c^2=a^2+b^2=14$

$c=\sqrt{14}$, $y=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{14}}{3}$; $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}x$.

2. Mavxum o'qi $2\sqrt{3}$ va deriktrisasi $x=\pm2$ bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. $2b=2\sqrt{3}$; $b=\sqrt{3}$; $2=\frac{a^2}{c}$ dan $c=\frac{a^2}{2}$, $c^2=a^2+b^2\to\frac{a^4}{4}=a^2+3\to$

$a^4-4a^2-12=0$. $a^2=z$, desak $z^2-4z-12=0\to z_1=6, z_2=-2$; $a^2=6$,

$$a=\sqrt{6}\quad ;a^2\neq-2,\quad \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1.$$

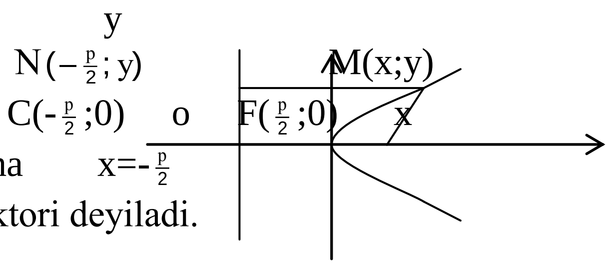
Parabola va uning tenglamasi.

Ta'rif. Fokus deb ataluvchi berilgan F nqtadan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to'g' ri chiziqdan bir xil uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga parabola deyiladi.

Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilib, direktrisadan fokusgacha bo’lgan masofani p deylik. Agar koordinata boshini R ning o’rtasidan olsak, direktrisa tenglamasi $x=-\frac{p}{2}$ bo’lishi ravshan. Ta’rifga kura NM=FM ;

$NM=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$; $FM=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$; NM=FM $\rightarrow$ $\boxed{y^2=2px}$ (1) - parabolaning kanonik tenglamasi; p ga parabolaning parametri deyiladi.
(1) da u ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun parabola Ox o’qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo’ladi.
Parabolaning simmetrik o’qi uning fokal, ya’ni xaqiqiy o’qi deyiladi.

Parabolaning simmetriya o’qi bilan kesishish nuqtasi uning uchi deyiladi. Parabolaning biror nuqtasidan fokusgacha bo’lgan masofa shu nuqtaning radius vektori deyiladi.



$r=FM=x+\frac{p}{2}$ parabola tenglamalari $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $y^2=-2py$ bo’lgan xollarni chizmada ko’rish mumkin. Shunday qilib, $x=\pm\frac{p}{2}$ yoki $y=\pm\frac{p}{2}$ to’g’ ri chiziqlar parabolaning direktrisalari deyiladi . Parabolaning biror $M_1(x_1,y_1)$ nuqtasiga o’tkazilgan urinma va normal tenglamalari qo’yidagicha bo’ladi.

$yy_1=p(x+x_1)$ -urinma; $y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1)$ - normal.

Misollar.

1. $y^2=20x$ parabolaning parametri, direktrisasini va abssissasi 7 bo’lgan nuqtasining radius vektorini toping.

Yechish.2p=20; p=10; $x=-\frac{p}{2}$, x=-5, $r=x+\frac{p}{2}$, r=12.

2. $y^2=12x$ parabolaning abssissasi 3 va ordinatasi musbat bo’lgan nuqtasidan o’tgan urinma va normal tenglamasini tuzing.

Yechish. 2p=12, p=6, $x_1=3$; $y_1>0$, $y_1=6$. Demak $x_1=3$; $y_1=6$; 6y=6(x+3), x-y+3=0 urinma $y-6=\frac{6}{6}(x-3)$, x+y-9=0 normal.

Misollar.

174. Quyidagi holning har biri uchun aylananing tenglamasi tuzilsin:
1) aylananing markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi va uning radiusi $R=3$;
2) aylananing markazi C(2;3) nuqta bilan ustma-ust tushadi va uning radiusi $R=7$;

3) aylana koordinatalar boshidan o'tadi va uning markazi S(6;-8) nuqta bilan ustma-ust tushadi;
4) aylana A(2;6) nuqtadan o'tadi va uning markazi C(-1;2) nuqta bilan ustma-ust tushadi;
5) A(3;2) va B(-1;6) nuqtalar aylana diametrlaridan birining oxirlaridan iborat;
6) aylana markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi va $3x-4y+20=0$ to'g'ri chiziq bu aylanaga urinma bo'ladi;
7) aylana markazi S(1;-1) nuqta bilan ustma-ust tushadi va $5x-12y+9=0$ to'g'ri chiziq bu aylanaga urinma bo'ladi;
8) aylana A(3;1) va B(-1;3) nuqtalardan o'tadi va uning markazi $3x-y-2=0$ to'g'ri chiziqda yotadi;
9) aylana uchta A(1;1), B(1;-1) va C(2;0) nuqtalar orqali o'tadi.
10) aylana uchta M_1(-1;5) , M_2(-2;2) va M_3(5;5) nuqtalar orqali o'tadi.

175. Markazi C(3;-1) nuqtada bo'lgan aylana $2x-5y+18=0$ to'g'ri chiziqda uzunlidan uzunligi 6 ta teng bo'lgan vatar ajratadi. Bu aylana tenglamasi tuzilsin.

176. Radiusi $R=5$ bo'lgan, $x-2y-1=0$, to'g'ri chiziqda M_1(3;1) nuqtada urinuvchi aylananing tenglamalari tuzilsin.

178. Markazi $2x+y=0$, to'g'ri chiziqda joylashgan va $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$ to'g'ri chiziqlarga urinuvchi aylananing tenglamasi tuzilsin.

179 Koordinatalar boshidan o'tuvchi va ikki kesishuvchi $x+2y-9=0$, $2x-y+2=0$ to'g'ri chiziqlarga urinuvchi aylanalar tenglamalari tuzilsin.

180. Quyidagi keltirilgan tenglamalardan qaysi birlari aylanani aniqlaydi? Ulardan har birining radiusi R va markazi C topilsin:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x+2)^2+y^2=64$;
3) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$; 4) $x^2+(y-5)^2=5$;
5) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; 6) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;
7) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$; 8) $x^2+y^2+x=0$;
9) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$; 10) $x^2+y^2+y=0$.

181. Quyidagi tenglamalar bilan qanday chiziqlar aniqlanganligi tekshirilsin:

1) $y=+\sqrt{9-x^2}$; 6) $y=15-\sqrt{64-x^2}$;
2) $y=-\sqrt{25-x^2}$ 7) $y=-2-\sqrt{9-y^2}$;
3) $x=-\sqrt{4-y^2}$ 8) $y=-2+\sqrt{9-y^2}$;
4) $x=+\sqrt{16-y^2}$ 9) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$;
5) $y=15+\sqrt{64-x^2}$; 10) $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$;

Bu chiziqlar chizmada tasvirlansin.

182. Quyidagi hollarda, fokuslari abssissalar o'qida (koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik) joylashgan ellipsning tenglamasi tuzilsin:
1) uning yarim o'qlari 5 va 2 ga teng;
2) uning katta o'qi 10, fokuslari orasidagi masofa esa $2C = 8$;
3) uning kichik yarim o'qi 24, fokuslari orasidagi masofa esa $2C = 10$;
4) uning fokuslar orasidagi masofa $2C = 6$ va ekssentrisiteti esa $E = \frac{3}{5}$
5) uning kata o'qi 20 ga teng, ekssentrisiteti esa $E = \frac{3}{5}$
6) uning kichik o'qi 10 ga teng ekssentrisiteti esa $E = \frac{12}{13}$;
7) uning direktrisalari orasidagi masofa 5 ga teng va fokuslar orasidagi masofa $2C = 4$;

8) uning katta o'qi 8 ga teng, direktrisalari orasidagi masofa esa 16 ga teng;
9) uning kichik o'qi 6 ga teng, direktrisalari orasidagi masofa esa 13 ga teng;
10) direktrisalari orasidagi masofa esa 32 ga teng va $E = \frac{1}{2}$;
183. Quyidagi holarda, fokuslari ordinatlar o'qida (koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik) joylashgan ellipsining tenglamasi tuzilsin:
1) uning yarim o'qlari mos ravishda 7 va 2 ga teng;
2) uning kata o'qi 10 ga teng, fokuslari orasidagi masofa esa $2C = 8$;
3) uning fokuslari orasida masofa $2C = 24$ va ekssentrisiteti $E = \frac{12}{13}$;
4) uning kichiko'qi 16 ga teng, ekssentrisiteti esa $E = \frac{3}{5}$;
5) uning fokuslari orasidagi masofa $2C = 6$ va direktrisalari orasidagi masofa $16\frac{2}{3}$ ga teng;
6) uning direktrisalari orasidagi masofa $10\frac{2}{3}$ ga teng va ekssentrisiteti $E = \frac{3}{4}$;

184. Ushbu $9x^2 + 25y^2 = 225$ berilgan ellipsga ko'ra:
1) uning yarim o'qlari; 2) fokuslari;
3) ekssentrisiteti ; 4) direktrisalarining tengmalari.
185. Ikki uchi $x^2 + 5y^2 = 20$ ellipsining fokuslarida yotgan, qolgan ikki uchi esa uning kichik o'qi oxirlari bilan ustma-ust tushgan to'rtburchakning yuzi hisoblansin.
186. Ushbu $9x^2 + 5y^2 = 45$ berilgan ellipsga ko'ra:
1) uning yarim o'qlari; 2) fokuslari ;
3) ekssentrisiteti ; 4) direktrisalarinig tengmalari topilsin.

187.Ikki uchi $9x^2+5y^2=1$ ellipsning fokuslarida, qolgan ikki uchi esa uning kichik o’qi oxirlari bilan ustma-ust tushgan to’rtburchakning yuzi hisoblansin.

188.Ushbu $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ ellipsda shunday nuqtalar aniqlansinki, ulardan chap fokusgacha bo’lgan masofa 2,5 ga teng bo’lsin.

189. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{7}=1$ ellipsning fokusi orkali uning kata o’qiga perpendikulyar o’tkazilgan. Bu perpendikulyarning ellips bilankesishigan nuqtalardan fokuslargacha bo’lgan masofalar aniqlansin.

190 . Agar quyidagilar berilgan bo’lsa, fokuslari abssisalar o’qida (koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik) joylashgan ellipsning tenglamasi tuzilsin:
1) ellipsning $M_1(-2\sqrt{5};2)$ nuqtasi va uning kichik yarim o’qi $b=3$;
2) ellipsning $M_1(2;-2)$ nuqtasi va uning kichik yarim o’qi $a=4$;
3) ellipsning $M_1(4;-\sqrt{3})$ va $M_2(2\sqrt{2};3)$ nuqtalari;
4) ellipsning $M_1(\sqrt{15};-1)$ nuqtasi va uning fokuslar orasidagi masofasi $2C=8$;
5) ellipsning $M_1(2;-\frac{5}{3})$ nuqtasi va uning ekssentrisiteti $E=\frac{2}{3}$;
6) ellipsning $M_1(8;12)$ nuqtasi va uning chap fokusgacha bo’lgan masofasi $r_1=20$;
7) ellipsning $M_1(-\sqrt{5};2)$ nuqtasi va uning direktrisalari orasidagi masofa 10 ga teng.

191. Quyidagi hollarda ellipsning ekssentrisiteti e aniqlansin:
1) ellipsning kichik o’qi fokuslardan 60^0 burchak ostida ko’rinadi;
2) fokuslar orasidagi qismi kichik o’qi uchlarida to’g’ri burchak ostida ko’rinadi;
3) direktrisalari orasidagi masofa fokuslar orasidagi masofadan uch marta katta;

192 Quyidagilarni bilgan holda fokuslari abssissalar o’qida (koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik) joylashgan giperbolaning tenglamasi tuzilsin:
1) uning o’qlari $2a=10$ va $2b=8$;
2) fokuslar orasidagi masofa va o’qi $2b=8$;
3) fokuslar orasidagi masofa 2s=6 va ekssentrisiteti $E=\frac{3}{2}$;
4) o’qi $2a=16$ va ekssentrisiteti $E=\frac{5}{4}$;
5) asimptotalarining tenglamalari $y=\pm\frac{4}{3}x$ va fokuslar orasidagi masofa $2C=20$;
6) Direktrisalar orasidagi masofa $22\frac{2}{13}$ va fokuslar orasidagi masofa $2C=26$ ga teng
7) Direktrisalar orasidagi masofa $\frac{32}{5}$ ga teng va o’qi $2b=6$;

8) Direktrisalar orasidagi masofa $\frac{8}{5}$ ga teng va ekssentrisiteti $E=\frac{3}{2}$;

9) asimptotalarining tenglamalari $y=\pm\frac{3}{4}x$ va direktrisalari orasidagi masova $12\frac{4}{5}$ ga teng.

193 Quyidagilarni bilgan holda fokuslar ordinatalar o'qida (koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik) joylashgan giperbolaning tenglamasi tuzilsin:

1) uning yarim o'qlari $a=6$, $b=18$ (biz a xarf bilan giperbolaning abssissalar o'qida joylashgan yarim o'qini belgilaymiz);

2)fokuslar orasidagi masofa $2c=10$ va ekssentrisiteti $E=\frac{5}{3}$;

3) asimptotalarining tenglamalari $y=\pm\frac{12}{5}$x va uchlari orasidagi masofa 48 ga teng;

4) direktrisalar orasidagi masofa $7\frac{1}{7}$ ga teng va ekssentrisiteti $E=\frac{7}{5}$;

5) asimtotalarning tenglamalari $y=\pm\frac{4}{3}x$ va direktrisalari orasidagi masofa $6\frac{2}{5}$ ga teng.

194. Agar quyidagilar berilgan bo'lsa, fokuslari abssissalar o'qida koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan giperbolannng tenglamasi tuzilsin:

1) giperbolaning $M_1(6;-1)$ va M_1 $(-8;2\sqrt{2})$ nuqtalari;

2) giperbolaning $M_1(-5;3)$ nuqtasi va ekssentrisiteti $E=\sqrt{2}$;

3) giperbolaning $M_1(\frac{9}{2};-1)$ nuqtasi va asimtotalarning tenglamalari $y=\pm\frac{2}{3}x$;

4) giperbolaning $M_1\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ nuqtasi va direktrisalarining tenglamalari $x=\pm\frac{4}{3}$;

5) asimtotalarning tenglamalari $y=\pm\frac{3}{4}$x va direktrisalarining tenglamalari $x=\pm\frac{16}{5}$;

195. Quyidagilarni bilan holda, uchi koordinatalar boshida joylashgan parabolaning tenglamasi tuzilsin:

1) parabola o'ng yarim tekislikda Ox o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan va uning parametri $p=3$;

2) parabola chap yarim tekislikda Ox o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan va uning parametri $p=0.5$;

3) parabola yuqori yarim tekislikda Oy o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan va uning parametri $p=\frac{1}{4}$;

4) parabola quyi yarim tekislikda Ou o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan va uning parametri;

196. Quyidagi parabolalar parametrlarining kattaligi va koordinata o’qlariga nisbatan joylanishi aniqlansin:

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

197. Quyidagilarga ko’ra uchi koordinatalar boshida joylashgan parabolaning tenglamasi tuzilsin:

1) parabola Ox o’qqa nisbatan simmetrik joylashgan va A(9;6) nuqta orqali o’tadi;

2) parabola Ox o’qqa nisbatini simmetrik joylashgan va V(-1;3) nuqta orqali o’tadi;

3) parabola Ou o’qqa nisbatini simmetrik joylashgan va S(1;1) nuqta orqali o’tadi;

4) parabola Ou o’qqa nisbatini simmetrik joylashgan va D(4;-8) nuqta orqali o’tadi;

198. Po’lat arqoni (tros) ikki uchidan osilgan; mahkamlangan nuqtalar bir xil balandlikda joylashgan; ular orasida masofa 20 m ga teng. Uning mahkamlangan nuqtadan, gorizontal bo’yicha hisoblanganda, 2m masofaga mos etilgan qismi 14,4 sm ga teng.

Arqonni taxminan parabola yoyi shakliga ega deb, bu arqonning mahkamlangan nuqtalari o’rtasidagi nuqtada mos qismining kattaligi aniqlansin.

199. $y^2 = 24x$ parabolaning F fokusi va direktrisasining tenglamasi topilsin.

200. $y^2 = 20x$ parabolada absissasi 7ga teng bo’lgan M nuqtaning fokal radiusi hisoblansin.

201. $y^2 16x$ parabolada fokal radiusi 13 ga teng bo’lgan nuqta topilsin.

202. Agar parabolaning F (7;2) fokusi va $x - 5 = 0$ direktrisasi berilgan bo’lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

203. Agar parabolaning F (4;3) fokusi $y + 1 = 0$ direktrisasi berilgan bo’lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

204. Agar parabolaning F (2;-1) fokusi va $x - y - 1 = 0$ direktrisasi berilgan bo’lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

205. Parabolaning A(6;-3) uchi va uning direktrisasining tenglamasi $3x - 5y + 1 = 0$ berilgan. Bu parabolaning F fokusi topilsin.

206. Parabolaning A(-2;-1) uchi va uning direktrisasining tenglamasi $x + 2y - 1 = 0$ berilgan. Shu parabolaning tenglamasi tuzilsin.

207. $y^2 = 6x$ parabola va $3x - 2y + 6 = 0$ to’g’ri chiziqning kesishgan nuqtalari aniqlansin:

208. Burchak koefisienti k ning qanday qiymatlarda $y = kx + 2$ to’g’ri chiziq;

1) $y^2 = 4x$ parabolani kesadi;

2) unga urinadi ;

3) bu parabolaning tashqarisidan o’tadi.

209. $y = kx + 2$ to’g’ri chiziqning $y^2 = 2px$ parabolaga urinish sharti keltirib chiqaralsin.

210. $y^2 = 2px$ parabolaga uning M_1 $(x_1;y_1)$ nuqtasi o’tkazilgan urinmaning tenglamasi tuzilsin.

211. $y^2 = 8x$ parabolaga urinuvchi va $2x + 2y - 3 = 0$ to’g’ri chiziqqa parallel bo’lgan to’g’ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

212. $y^2 = 64x$ parabolada $4x+3y-14=0$ to'g'ri chiziqqa eng yaqin bo'lgan M_1 nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa bo'lgan d masofa hisoblansin.

213. $y^2 = 36x$ parabola A(2;9) nuqtadan o'tkazilgan tenglamasi tuzilsin.

214. $y^2 = 2px$ parabolaga urinma o'tkazilgan . Bu parabolaning uchi, urinmaning OX o'q bilan kesishgan nuqtasi bilan urinish nuqtasining OX dagi proeksiyasi, o'rtasida yotishligi isbotlansin.

215. Quyidagi tenglamalarning har biri soda ko'rinishga keltirsin, ulardan har birining tipi aniqlansin; ularning qanday geometrik obrazlarni aniqlanish va bu obrazlarning yangi va eski koordinata o'qlariga nisbatan joylashishi chizmada tasvirlansin.

1) $32x^2+52xy-7y^2+180=0$ 2) $5x^2-6xy+5y^2-32=0$

3) $17x^2-12xy+8y^2=0$ 4) $5x \ +24xy-5y^2=0$

5) $5x^2-6xy+5y^2=0$

216. Quyidagi tenglamalar uchun yuqori hadlarning diskriminantlarini hisoblash yordami bilan ularning tipii aniqlansin.

1) $2x^2+10xy+12y^2-7x+18y-15=0$ 2) $3x^2-8xy+7y^2+x-15y+20=0$

3) $25x^2+20xy+4y^2-12x+20y-17=0$ 4) $5x^2+14xy+11y^2+12x-7y+19=0$

5) $x^2-4xy+4y^2+7x-12=0$ 6) $3x^2-2xy-3y^2+12y-15=0$

217. Quyidagi tenglamalar har biri kanonik ko'rinishga keltirsin; ularning har birining tipi aniqlansin; ular qanday geometrik obraz aniqlaydi; har bir hol uchun dastlabki koordinata sistemasi va keyingi echish jarayonida kiritilgan boshqa koordinata sistemalarining o'qlari hamda, berilgan tenglama bilan aniqlangan, geometrik obraz chizmada tasvirlansin.

1) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ 2) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$

3) $4xy+3y^2+16x-12y-36=0$ 4) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+20=0$

5) $19x^2+6xy+4y^2+38x+6y+29=0$ 6) $5x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$

218. Quyidagi tenglamalarning har biri kanonik ko'rinishga keltirilsin; ularning har birining tipi aniqlansin; ular qanday geometrik obraz aniqlaydi; har bir hol uchun dastlabki koordinata sistemalarning o'qlari hamda, berilgan tenglama bilan aniqlangan, geometrik obraz chizmada tasvirlansin.

1) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$ 2) $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$

3) $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$ 4) $50x^2-8xy+35y^2+100x-8y+67=0$

5) $41x^2+24xy+34x-112y+129=0$ 6) $29x^2-29xy+36y^2+82x-96y-91=0$

7) $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$ 8) $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$

7-§. TEKISLIK VA UNING TENGLAMALARI.

Tekislikning umumiy tenglamasi.

Agar $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ tenglamada qavslarni ochib so'ngra

$-Ax_1-Vy_1-Cz_1=D$ desak

$$\boxed{Ax+Vy+Sz+D=0} \quad (1)$$

tenglama kelib chiqadi. (1) ga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.
1. Agar (1) da D=0 bo'lsa , Ax+Vz+Sz=0 bo'lib, koordinata boshidan o'tgan tekislikni ifodalaydi.
2. Agar (1) da A=0 bo'lsa, Vy+Sz+D=0 tekislik Ox o'qiga parallel.
Agar V=0 bo'lsa, Ax+Cz+D=0 tekislik Ou o'qiga parallel bo'ladi. S=0 bo'lsa, Ax+Vy+D=0 tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi.
3. Agar S=0 D=0 bo'lsa, Ax+Vy=0 tenglama Oz o'qidan o'tgan tekislikni tasvirlaydi. Agar A=0, D=0 bo'lsa, tekislik Ox o'qidan o'tadi. Agar V=0, D=0 bo'lsa, tekislik OU o'qidan o'tadi.
4. $A\neq 0$, $D\neq 0$, B=C=0 bo'lsa, Ax+D=0 yoki $x=-\frac{D}{A}$ yOz koordinatalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi bo'ladi.
Shuningdek A=C=0, $B\neq 0$, $D\neq 0$ bo'lsa, Vy+D=0 xOz
tekisligiga parallel, A=B=0, $C\neq 0$, $D\neq 0$ bo'lsa, Cz+D=0 xOy tekisligiga parallel tekisliklarni ifodalaydi.
5. Agar $A\neq 0$, B=C=D=0 bo'lsa, Ax=0 yoki x=0 tenglama yOz tekislikni tasvirlaydi.
$B\neq 0$, A=C=D=0 bo'lsa, Vy=0 yoki y=0 xOz tekislikni,
$C\neq 0$, A=B=D=0 bo'lsa, Cz=0 yoki z=0 xOy tekisliklarni ifodalaydi.

Tekislikning kesmalar buyicha tenglamasi.

Koordinata boshidan o'tmagan va koordinata o'qlariga parallel bo'lmagan tekislik tenglamasi Ax+Vy+Sz+D=0 (1) ko'rinishda bo'lib,
$A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$ bo'lsin. (1) ni qo'yidagicha yozib olaylik:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Agar $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ десак $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
bo'ladi.

Oxirgi tenglamaga tekislikning kesmalar buyicha tenglamasi deyiladi. a,b,s lar tekislikning mos ravishda Ox,Oy,Oz o'qlaridan ajratgan kesmalardir.
Misol. -3x-2u+1,5z=6 tenglamani kesmalar ko'rinishga keltiring.

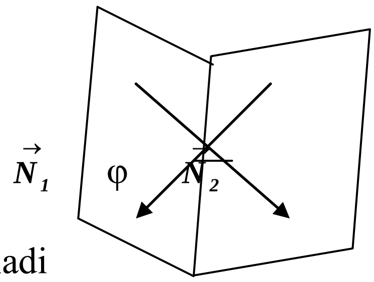
$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1; \quad a=-2; \; b=-3; \; z=4 .$$

Tekisliklar orasidagi burchak va ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Fazoda o'zaro kesishuvchi ikkita tekislik quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Q_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, Q_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Ikkita tekislik kesishganda ikkita ikki yoqli burchak xosil bo'lib, ularning bittasi shu tekisliklarning normal vektorlari orasidagi φ burchak bo'lib, ikkinchisi esa 180°- φ bo'ladi



Tekisliklarning normal $\vec{N}_1 = A_1\vec{i}\, B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ vektorlari orasidagi burchak:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = |\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2| \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (1)$$

Agar tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'lsa , φ =90° bo'lib cos φ =0 bo'ladi. Bu (1) dan

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (2)$$

(2) ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti kelib chikadi .

Agar tekisliklar parallel bo'lsa, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ normal vektorlar kollinear bo'lib, ularning koordinatalari propors ional bo'ladi.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3)$$

(3) ikkita tekislikning parallellik sharti.

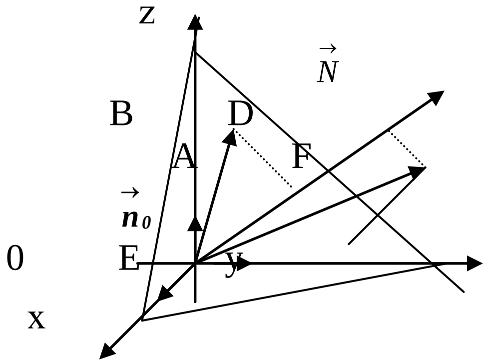
Misol. 2x+3u-z+2=0, x+u+5z-1=0 tekisliklar orasidagi burchak $\varphi = 90^0$ bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Tekislikning normal tenglamasi.
Tekislikdan berilgan nuktagacha bo'lgan masofa.

Bizga biror Q tekislik berilgan bo'lsin.

Koordinata boshidan shu tekislikka tushirilgan perpendikulyarni shu tekislikning normal vektori sifatida olaylik. Normal vektorning tekislik bilan kesishish nuqtasini A deb, OA=p deylik.

Tekislikning $\vec{N}$ normal yo'nalishida



$\vec{n}_0 = \{\cos\alpha ; \cos\beta ; \cos\gamma\}$ birlik vektorni va biror B(x,y,z) nuqtani olaylik. Bu xolda $\text{пр}_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OB} =$ OA=p (1) bo'ladi. Ikkinchi tomondan proyeksiyalar xaqidagi nazariyaga ko'ra

$|\vec{n}_0|\, np_{\vec{n}_0}\, \overrightarrow{OB} = \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{OB}$ (2) $|\vec{n}_0|=1$ (1) va (2) larning chap tomonlari teng bo'lgani uchun o'ng tomonlarini tenglashtirsak

$\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{OB}=p$ yoki $(\cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k})(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = p$

yoki $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad (3)$$

tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi Ax+Vy+Sz+D=0 (4) ko'rinishda berilgan bo'lsa , uni (3) normal ko'rinishga keltirishni ko'raylik . (3) va (4) lar bitta tekislik tenglamasi bo'lgani uchun bu tenglamalarning koeffisiyentlari proporsional bo'lishi kerak. Shuning uchun (4) ni λ ga ko'paytirib (3) ga tenglasak

$\lambda(Ax+By+Cz+D) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$,

$$\lambda A=\cos\alpha;\ \lambda B=\cos\beta;\ \lambda C=\cos\gamma;\ \lambda D=-p \ (5)$$

(5)dan $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ kelib chiqadi . λ ga normallovchi ko'paytuvchi deyiladi, uning ishorasi (4) dagi D ning ishorasiga teskari olinadi.

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda Cz+D=0 \ \Rightarrow \ \frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \quad (6).$$

(6) tekislikning normal tenglamasi bo'ladi.

(5) dan $\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$D=-\dfrac{p}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ekanligi ravshan.

Endi Q tekislikdan berilgan $F(x_o; y_o; z_o)$ nuqtagacha bo'lgan masofani xisoblashni ko'raylik.

Bu masofa $F(x_o; y_o; z_o)$ nuqtadan tekislikka tushirilgan d=EF perpendikulyar bo'lishi ravshan. Agar tekislik tenglamasi

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

normal ko'rinishda berilgan bo'lsa , izlanayotgan masofa

$$d=|\, x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\, | \quad (6)$$

formula bilan xisoblanadi.

Agar tekislik tenglamasi Ax+Vy+Sz+D=0 umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (7) \quad \text{bo'ladi.}$$

Misol. F(3,-2,1) nuqtadan 3x+6y-5z+2=0 tekislikgacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Tenglamani normal ko'rinishga keltiraylik.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{70}}, \quad -\frac{3}{\sqrt{70}}x + \frac{6}{\sqrt{70}}y - \frac{5}{\sqrt{70}}z + \frac{2}{\sqrt{70}} = 0 \Rightarrow d = \left|\frac{3\cdot 3}{\sqrt{70}} - \frac{6\cdot 2}{\sqrt{70}} - \frac{5\cdot 1}{\sqrt{70}} + \frac{1\cdot 2}{\sqrt{70}}\right| = \frac{6}{\sqrt{70}}$$

Misollar.

219. Normal vektori $\vec{n} = \{1 : -2 : 3\}$ bo'lgan va M $_1$ (2;1-1) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.
220. Koordinatalar boshidan o'tuvchi va $\vec{n} = \{5 : 0 : -3\}$ normal vektorga ega bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.
221. Koordinatalar boshidan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi $P = \{2 : -1 : -1\}$ nuqtada joylashgan. Tekislikning tenglamasi tuzilsin.
222. Ikkita M_1(3;-1;2) va M_2 (4;-2;-1) nuqtalar berilgan. M_1 nuqtadan o'tuvchi va $\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.
223. M_1(3;4;-5) nuqtadan o'tuvchi va $\vec{a}_1 = \{3 : 1 : -1\}$, $\vec{a_2} = \{1 : -2 : 1\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.
224. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o'tgan $\vec{a_1}=\{\ell_1;m_1;n_1\}$ hamda $\vec{a_2}=\{\ell_2;m_2;n_2\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishda ekanligi isbotlansin:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

225. M_1 (2;-1;3) va M_2 (3;1;2) nuqtalardan o'tuvchi va $\vec{a_1} = \{3 : -1 : 4\}$ vektorga parallel tekislik tenglamasinituzing.
226. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan o'tadigan hamda $\vec{a} = \{\ell, m, n\}$ vektorga parallel bo'lgan tekislikning tenglamasi.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0$$ ko'rinishda ekanligini isbotlang.

227. Uchta nuqta M_1(3;-1;2),M_2 (4;-1;-1) va M_3 (2;0;2) lardan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.
228. $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ko'rinishda ekanligini isbotlang.
229. Quyidagi tenglamalarning har biri uchun birorta normal vektorning koordinatalarini aniqlang. Har bir hol uchun ixtiyoriy normal vektorning koordinatalarining umumiy ifodasini yozing:
1) $2x - y - 2z + 5 = 0$ 2) $x + 5y - z = 0$ 3) $3x - 2y - 7 = 0$

4) $5y-3z=0$ 5) $x+2=0$ 6) $y-3=0$

230 . Quyidagi juft tenglamalarining qaysi biri parallel tekisliklarni aniqlaydi:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$

2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$

3) $x-3z+2=0$, $2x-6z-7=0$

231. Quyidagi juft tenglamalarining qaysi biri perpendikulyar tekisliklarni aniqlaydi:

1) $3x-3y-2z-5=0$, $x+9y-3z+2=0$

2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$

3) $2x-5y+z=0$, $x+2z-3=0$

232. ℓ va m larning qanday qiymatlarida quyidagi juft tenglamalar parallel tekisliklarni aniqlaydi:

1) $2x+\ell+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

2) $3x-y+\ell z-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx+3y-2z-1+=0$, $2x-5y-\ell z=0$;

233. ℓ ning qanday qiymatida quyidagi juft tenglamalar perpendikulyar tekisliklarni aniqlaydi:

1) $3x-5y+\ell z-3=0$, $x+3y+2z+5=0$

2) $5x+y+3z-3=0$, $2x+\ell y-3z+1=0$

3) $7x-2y-3=0$, $\ell x+y-3z-1=0$

234. Quyidagi juft tekisliklarning kesishishidan hosil bo’lgan ikkiyoqli burchaklarni aniqlang.

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$

2) $3y-z=0$, $2y+z=0$

3) $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$

4) $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$

235. Koordinatalar boshidan o’tgan va $5x-2y+3z-3=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

236. M_1(3;-2;-7) nuqtadan o’tuvchi va $2x-y+3z+5=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

237. Koordinatalar boshidan o’tuvchi va $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasini tuzing.

238. Quyidagi shartrlarni qanoatlantiruvchi tekislik tenglamalarini tuzing:

1) M_1(2;-3;3) nuqtadan o’tadi va OXY tekisligiga parallel;

2) M_2(1;-2;4) nuqtadan o’tadi va OXZ tekisligiga parallel;
3) M_3(-5;2;-1) nuqtadan o’tadi va OYZ tekisligiga parallel;

239. Shunday tekislik tenglamasini tuzinkgi, u 1) ox o’qidan va M_1(4;-1;2) nuqtadan o’tsin; 2) oy o’qidan va M_2(1;4;-3) nuqtadan o’tsin; 3) oz o’qidan va M_3(3;-4;7) nuqtadan o’tgan bo’lsin.

240. $2x-3y+4z-24=0$ tekislikning koordinat o’qlari bilan kesishgan nuqtalarni toping.

241. Tekislikning $x+2y-3z-6=0$ tenglamasi berilgan. Uning “kesmalardagi” tenglamasini tuzing.

242. $3x-4y-24z+12=0$ tekislikning koordinat o’qlaridan ajratgan kesmalari aniqlang.
243. $5x-6y+3z+120=0$ tekislikning koordinat burchakdan kesgan uchburchak yuzasini hisoblang.
244. Koordinat tekisliklari va $2x-3y+6z-12=0$ tekislik bilan chegaralgan piramida xajmi hisoblansin.
245. $\vec{n}=\{-2:1:3\}$ vektorga perpendikulyar va oz o’qida $c=-5$ kesma ajratgan tekislik tenglamasini tuzing.
246. $\vec{\ell}=\{2:1:-1\}$ vektorga parallel va ox, ou koordinat o’qlarida mos ravishda $a=+3$, $b=-2$ kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

247. Quyidagi tenglamalarni normal ko’rinishga keltiring.
1) $2x-2y+z-18=0$ 2) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$
3) $-4x-6y-12z-11=0$ 4) $-4x-4y+12z+1=0$
5) $5y-12z+26=0$ 6) $3x-4y-1=0$
7) $y+2=0$ 8) $-x+5=0$
9) $-x+3=0$ 10) $2z-1=0$.
248. Quyidagi tekisliklarning har biri uchun normalning koordinata o’qlari bilan hosil qilgan α,β va γ burchaklari va koordinatlar boshidan tekislikkacha bo’lgan R masofa aniqlansin.
1) $x+y\sqrt{2}+z-10=0$ 2) $x-y-z\sqrt{2}+16=0$x
3) $x+z-6=0$ 4) $y-z+2=0$
5) $x\sqrt{2}+y+10=0$ 6) $x-2=0$
7) $2x+1=0$ 8) $2y+1=0$
9) $x-2y+2z-6=0$ 10) $2x+3y-6z+4=0$.

249. Quyidagi nuqtalarining har biri uchun berilgan tekisliklardan δ chetlanish va nuqtadan tekislikkacha d masofa hisoblansin.

1) M_1(-2;-4;3), $2x - y + 2z + 3 = 0$;
2) M_2(2;-1;-1), $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;
3) M_3(1;2;-3), $5x - 3y + z + 4 = 0$;
4) M_4(3;-6;7), $4x - 3z + 1 = 0$;
5) M_5(9;2;-2), $12y - 5z + 5 = 0$.

250. M_1(1;-1;1) , M_2(-2;1;3) va M_3(4;-5;-2) nuqtalardan tekislik o'tkazildi. R(-1;1;-2) nuqtadan shu tekislikkacha bo'lgan d masofani hisoblanlang.

251. Q(2;-2;1) nuqta va koordinatalar boshining quyidagi tekisliklardan bir tomonida yoki turli tomonlarda joylashganligini aniqlang:
1) $5x - 3y + z - 18 = 0$; 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$;
3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$; 4) $2x - y + z + 11 = 0$;
5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$; 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$;

252. $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ tekislikning chegaralari M_1(3;-2;1) va M_2(-2;5;2) nuqtalar bo'lgan kesmani kesib m o'tishi isbotlansin.

253. $5x - 2y + z - 1 = 0$ tekislikning M_1(1;4;-3) va M_2(2;5;0) nuqtalar hosil qilgan kesma bilan kesishmasligi isbotlansin.

254.Quyidagi parallel tekisliklar orasidagi masofalar hisoblansin.
1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 6z - 6 = 0$ 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$
3) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$ 4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$, $6x + 12y - 15z + 25 = 0$

5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0$, $15x - 16y + 12z - 25 = 0$ 6) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$, $4x - 12y - 6z - 7 = 0$

255. Kubning ikkita qirasi $2x - 2y + z - 1 = 0$ va $2x - 2y + z + 5 = 0$ tekisliklarda joylashgan. Kubning hajmini hisoblang.

256. $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ tekislikning koordinat tekisliklari bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziq tenglamalari tuzilsin.

257. $3x - y - 7z + 9 = 0$ tekislik bilan E(3;2;-5) nuqtadan hamda Ox o'qidan o'tuvchi tekislikning kesishishidan hosil bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

258. $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin.

259. D ning qanday qiymatlarda $\begin{cases} 2x+y-z+D=0 \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq
1) Ox o'qini ; 2) Ou o'qini kesib o'tadi ?

260. Ikkita tekislikning, ya'ni $2x-y+3z-5=0$ va $x+2y-z+2=0$ tekisliklarning kesishish chizig'idan o'tuvchi va $\vec{l}=(2;-1;-2)$ vektorga parallel tekislik tenglamasi tuzing.

261. $3x-2y+z-3=0$, $x-2z=0$ tekisliklarning kesishishdan hosil bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $x-2y+z+5=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.

262. $\alpha(3x-4y+z+6)+\beta(2x-3y+z+2)=0$ tekisliklar dastasiga tegishli va M_1(3;-4;-6), M_2(1;2;2) nuqtalardan bir xil uzoqlikdagi tekislik tenglamasi tuzilsin.

263. ℓ va m larning qanday qiymatlarida $5x+ly+4z+m=0$ tekislik $\alpha(3x-7y+z-3)+\beta(x-9y-2z+5)=0$ dastaga tegishish bo'ladi.

264. $\begin{cases} 2x-y+2z-3=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklarini proeksiyalovchi tekisliklarning tenglamalari tuzilsin.

265. $\begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-3y+2z-2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning $x+2y+3z-5=0$ tekislikka proeksiyalovchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

266. $\begin{cases} 5x-4y-2z-5=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning 2x-y+z-1=0 tekislikdagi proeksiyasi topilsin.

267. Quyidagi ikkita nuqtadan o'tuvchi tekislikning kanonik tenglamalari tuzilsin;
1) (1;-2;3),(3;1;-1), 2) (3;-1;0), (1;0;-3),
3) (0;-2;3), (3;-2;-1), 4) (1;2;-4), (-1;2;4)

8-§. FAZODAGI TO'G'RI CHIZIQ.

Fazodagi chiziq deganda, ixtiyoriy ikkita sirtning kesishishidan hosil bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnini tushunamiz. Shuning uchun fazodagi chiziqning umumiy tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar (1) tenglamadagi x,u ,z lar birinchi darajada qatnashsa, ular tekisliklarni ifodalab, bu tekisliklarning kesishish nuqtalarining geometrik o'rni to'ђri chiziq bo'ladi.Shuning uchun fazodagi to'ђri chiziqning umumiy tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Fazodagi to'g'ri chiziqning vektor, parametrik va kanonik tenglamalari.

Fazoda biror ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, bu to'sri chiziqning xolati, shu to'sri chiziqda yotuvchi $A(x_1,y_1,z_1)$ nuqta bilan shu to'sri chiziqqa parallel bo'lgan yoki ustma-ust tushgan $\vec{s}=\{\ell,m,n\}$ vektorning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. $\vec{s}=\ell i+mj+nk$ vektorni ℓ to'sri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

ℓ to'sri chiziq ustida ixtiyoriy $V(x,y,z)$ nuqta olaylik.

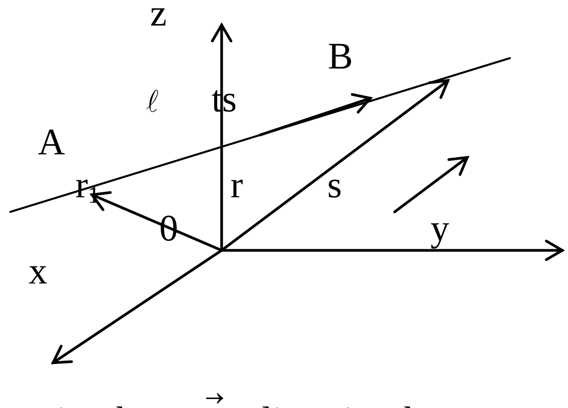
Chizmadan ko'rinadiki $\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}$ $\vec{AB}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lgani uchun

$$\vec{AB}=t\vec{s}$$

Yoki

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{s} \qquad (1)$$

(1)ga fazodagi to'sri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.



Agar $\vec{r}=\vec{OB}=xi+yj+zk$, $\vec{r}=\vec{OA}=x_1i+y_1j+z_1k$, $t\vec{s}=tli+tmj+tnk$ ekanliklarini eqtiborga olsak

$$xi+yj+zk=(x_1+tl)i+(y_1+tm)j+(z_1+tn)k \Rightarrow \left.\begin{aligned} x=x_1+tl \\ y=y_1+tm \\ z=z_1+tn \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) ga fazodagi to'sri chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi.

To’sri chiziqning (2) ko’rinishdagi parametrik tenglamasidan to’sri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasining koordinatasini topishda foydalanish qulaydir.

Xaqiqatan, to’sri chiziq tenglamasi (2) ko’rinishda, tekislik tenglamasi

$$Ax+Vy+Sz+D=0 \qquad (3)$$

ko’rinishda berilgan bo’lsa, (2) ni (3) ga qo’ysak:

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Al+Bm+Cn} \qquad (4)$$

xosil bo’ladi. $Al+Bm+Cn \neq 0$ chunki to’sri chiziq bilan tekislik parallel emas.

(4) ni (2) ga qo’ysak izlanayotgan nuqtaning koordinatasi kelib chiqadi.Agar (2) dan

t ni topsak , $t=\frac{x-x_1}{l}$; $t=\frac{y-y_1}{m}$; $t=\frac{z-z_1}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ (5)

(5) ga to’sri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi yoki berilgan nuqtadan o’tgan va berilgan yo’nalishdagi to’sri chiziq tenglamasi xam deyiladi.

Xususiy xolda $\vec{s}$ yo’naltiruvchi vektor koordinata o’qlari bilan α, β, γ burchak tashkil qiluvchi birlik vektor bo’lsa, u xolda (5) tenglama quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma} \qquad (6).$$

Agar ℓ to’sri chiziq koordinata o’qlarining biriga masalan Ox ga perpendikulyar bo’lsa, u xolda l=0 bo’lib, (2) va (5) formulalar quyidagicha bo’ladi:

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1 \\ y=y_1+tm \\ z=z_1+tn \end{array}\right\} \quad (2) \qquad \frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad (5')$$

Agar to’sri chiziq koordinata o’qlarining biriga masalan Oz ga parallel bo’lsa, $\vec{s}\perp$Ox, $\vec{s}\perp$Oy bo’lib, $\vec{s}$={0,0,n} bo’ladi. Bu xolda to’sri chiziqning kanonik tenglamasi

$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{n}$ ko’rinishda bo’ladi.

Agar to’sri chiziqning tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

umumiy ko’rinishda berilgan bo’lsa, (5) kanonik tenglamasiga o’tish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak.

1.(5) dagi A(x_1,y_1,z_1) nuqtaning koordinatasini topish kerak. Buning uchun (7) dagi x,y,z larning ixtiyoriy bittasiga biror aniq qiymat berib, qolgan ikkitasini shu (7) sistemadan topamiz.

2. ℓ to’sri chiziqning $\vec{s}$={l,m,n} yo’naltiruvchi vektorini topish kerak. ℓ to’sri chiziq $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklarning kesishishidan xosil bo’lgani

uchun bu tekisliklarning $\vec{N_1}=A_1i+B_1j+C_1k$ va $\vec{N_2}=A_2i+B_2j+C_2k$ normal vektorlariga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun ℓ to'sri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida

$\vec{N_1}$ va $\vec{N_2}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini olsa bo'ladi:

$$\vec{s}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}k=li+mj+nk;$$

$$\vec{s}=\{l;m;n\}=\left\{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\}$$

Misol. $\begin{cases}3x+2y+4z-11=0\\ 2x+y-3z-1=0\end{cases}$ to'sri chiziqning kanonik tenglamasini tuzaylik.

1) $x_1=1$ desak $\begin{cases}y+2z=4\\ y-3z=-1\end{cases}$ $y_1=2$; $z_1=1$. $A(x_1,y_1,z_1)=A(1,2,1)$.

2) $s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=-10i+17j-k$; Demak , $\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{-1}$

Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Berilgan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o'tgan ℓ to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzaylik. Buning uchun to'sri chiziqda ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqta olib, ℓ to'sri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{s}$ vektorni olaylik. U xolda $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lgani uchun $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\vec{s}$, ya'ni

$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{M_1M_2}$ $\Leftrightarrow$ $(x-x_1)i+(y-y_1)j+(z-z_1)k=\lambda\ [(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k]$ $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned}x-x_1&=\lambda(x_2-x_1)\\ y-y_1&=\lambda(y_2-y_1)\\ z-z_1&=\lambda(z_2-z_1)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\quad\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

- bu xosil bo'lgan tenglamaga berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'sri chiziq tenglamasi deyiladi.

Ikki to'sri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.

Fazodagi ikkita to'sri chiziq orasidagi burchak deb, bu to'sri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Agar to’g’ri chiziqlar kanonik tenglamalari bilan berilgan bo’lsa, ya’ni

$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ va $\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}=\frac{z-z_1}{n_2}$ bo’lsa, bu to’g’ri chiziqlarning yo’naltiruvchi vektorlari $\vec{s}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$, $\vec{s}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ bo’lishlari ravshan.

Bu vektorlar orasidagi burchak

$\vec{s}_1\vec{s}_2=|\vec{s}_1||\vec{s}_2|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{s_1 s_2}{|s_1||s_2|}$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi=\frac{l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \qquad (1)$$

Agar to’sri chiziqlar parallel bo’lsa, u holda $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ yo’naltiruvchi vektorlar kollinear bo’lib, ularning koordinatalari (proyeksiyalari) proporsional bo’ladi, ya’ni

$$\vec{s}_1=\lambda\vec{s}_2, \qquad \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \qquad (2)$$

(2) formula fazodagi ikki to’sri chiziqning parallellik shartidir.

Agar to’sri chiziqlar perpendikulyar bo’lsa, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo’lib, $\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{2}=0$ bo’ladi. U holda (1) dan $l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0$ (3)

fazodagi ikki to’sri chiziqning perpendikulyarlik shartini hosil qilamiz.

Agar $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ to’sri chiziq va Ax+Vy+Sz+D=0 tekislik berilgan bo’lsa, ularning o’zaro parallel bo’lishi uchun to’sri chiziqning $\vec{s}=\{l,m,n\}$ yo’naltiruvchi vektori va tekislikning normal vektori $\vec{s}=\{A,B,C\}$lar o’zaro perpendikulyar bo’lishi shart, ya’ni

$$Al+Bm+Cn=0 \qquad (4).$$

Agar to’sri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo’lsa, $\vec{s}\,||\,\vec{s}$ bo’ladi. Bundan

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \qquad (5)$$

shart kelib chiqadi.

Tekisliklar dastasi.

Berilgan ℓ to’sri chiziq orqali o’tuvchi tekisliklar to’plamiga tekisliklar dastasi deyiladi. ℓ to’sri chiziq esa dasta o’qi deyiladi.

Dasta o’qi yaqni ℓ to’sri chiziqning umumiy tenglamasi berilgan bo’lsin:

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(1)ning ikkinchi tenglamasini o'zgarmas λ ga ko'paytirib birinchisiga qo'shamiz.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

tenglama λ ning xar qanday qiymatida (1) to'sri chiziq orqali o'tuvchi ($A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ tekislikdan tashqari) xar qanday tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Xaqiqatan (2) dastaning ixtiyoriy tekisligi uning dasta o'qida yotmagan $M(x_1,y_1,z_1)$ nuqtasi bilan aniqlanadi. Shuning uchun M nuqtaning koordinatalarini (2) ga q o'ysak,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_2x+B_2y+C_2z+D_2} \qquad (3)$$

(3) ni (2) ga qo'ysak, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini hosil qilamiz. λ ning turli qiymatlarida esa, (1) to'sri chiziq orqali o'tgan har xil tekisliklar tenglamasini xosil qilamiz. Shuning uchun (2) ga tekisliklar dastasining tenglamasi ham deyiladi.

Misollar.

1. $\begin{cases} 2x+3y-5z+1=0 \\ 3x-y+z+28=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq va $M_1(1,-2,3)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $2x+3y-5z+1+\frac{1}{2}(3x-y+z+28)=0$ bunga berilgan M_1 nuqtaning koordinatalarini qo'ysak $\lambda=\frac{1}{2}$

2. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ to'sri chiziq orqali o'tuvchi va 3x+3u-z+1=0 (a) tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ y-3z+1=0 \end{cases}$

Bu xolda tekisliklar dastasining tenglamasi

$$3x-2y-5+\lambda(y-3z+1)=0 \Leftrightarrow 3x+(\lambda-2)y-3\lambda z-5+\lambda=0 \quad (b).$$

(a) va(b) tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'lgani uchun ularning $N_1=\{3;3;-1\}$ va $N_2=\{3;\ \lambda-2;-3\lambda\}$ normal vektorlari perpendikulyar bo'ladi. U holda

$N_1N_2=0\Rightarrow(3i+3j-k)[3i+(\lambda-2)j-3\lambda k]=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$, $3x-2y-5-\frac{1}{2}(y-3z+1)=0 \Rightarrow$ $6x-5y+3z=0$.

Misollar.

268. $M_1(1;-1;3)$ nuqtadan o'tgan va quyidagalarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari tuzilsin:

1) $\bar{a}=\{2;-3;4\}$ vektorga ; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$ to'g'ri chiziqqa;
3) $x=3t-1;\ y=-2t+2$ to'g'ri chiziqqa.

269. M_1(-6;6;-5) va M_2(12;-6;1) nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazilgan .Shu to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklari bilan kesishish nuqtalari topilsin.

270. M_1(2;3;-5) nuqtadan o'tuvchi va $\begin{cases} 3x-y+2z-4=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari tuzilsin.

271. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamalari tuzilsin.
1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$

272. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamalari tuzilsin:
1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$

273. To'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak topilsin:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

274. To'g'ri chiziqlar orasidagi o'tmas burchak topilsin:
x=3t-2, y=0, z=-t+3 va x=2t-1, y=0, z=t-3.

275. M_1(-1; 2;-3) nuqtadan o'tuvchi, $\vec{a}$={6;-2;-3) vektorga prependikulyar va $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$ to'g'ri chiziqning kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

276. M(x;y;z) nuqta harakatining tenglamalari berilgan:
x=5-2t, y=-3+2t, z=5-t shu nuqtaning $t_1=0$ momentdan $t_2=7$ momentgacha bosib o'tgan d yo'lini aniqlang.

277. Boshlang'ich nuqtasi M_0(3;-1;-5) bo'lgan va $\vec{s}=\{-2;6;3\}$ vektor yo'nalishida to'g'ri chiziqli tekis xarakat qilayotgan M(x;y;z) nuqtaning tezligi $\vartheta=21$, shu nuqtaning harakat tenglamalarini tuzilsin.

278. M(x;y;z) nuqta boshlang'ich vaziat M_0(20;-18;-32) dan boshlab $\vec{s}=\{3;-4;-12\}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalishida $v=26$6 tezlik bilan to'g'ri

chiziqli harakat qilmoqda. M(x;y;z) nuqtaning harakat tenglamalarini tuzing va $t=3$ vaqtda M qanday nuqta bilan mos tushinishi aniqlang.

279. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi topilsin:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $\quad 2x+3y+z-1=0$

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $\quad x-2y+z-15=0$

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-5}$, $\quad x+2y-2z+6=0$

280. M_0(2;-3;-5) nuqtadan o'tuvchi va $6x-3y-5z+2=0$ tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

281. M_0(1;-1;-1) nuqtadan o'tuvchi va $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

282. M_0(1;-2;1) nuqtadan o'tuvchi va $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

283. m ning qaysi qiymatida $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ to'g'ri chiziq $x-3y+6z+7=0$ ning tekislikka parallel?

284. C parametrning qanday qiymatida $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$

285. A va D ning qanday qiymatlarida $x=3+4t,\ \ y=1-4t,\ \ z=-3-t$ to'g'ri chiziq $Ax+2y-4z-D=0$ tekislikda joylashgan bo'ladi.

286. R(2;-1;3) nuqtaning $x=3t,\ y=5t-7,\ z=2t+2$ to'g'ri chiziqdagi proeksiyasi topilsin.

287. $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa nisbatan R(4;1;6) nuqtaga simmetrik bo'lgan Q nuqtani aniqlang.

288. M_1(5;4;6) va M_2(-2;-17;-8) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa nisbatan P(2;-5;7) nuqtaga simmetrik bo'lgan Q nuqtani aniqlang.

289. P(5;2;-1) nuqtaning $2x-y+3z+23=0$ tekislikdagi proeksiyasi topilsin .

290. P(1;-1;-2) nuqtadan $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofani aniqlang.

291. P(2;3;-1) nuqtadan quyidagi to'g'ri chiziqlargacha bo'lgan d masofani aniqlang:

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$ 2) $x=t+1, \quad y=t+2, \quad z=4t+13$

3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}$

292. To'g'ri chiziqlarning paralleligini isbotlab, ular orasidagi d masofani toping.

$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$

293. Quyidagi hollarning har biri uchun ikki to'g'ri chiziq orasidagi eng qisqa masofa topilsin:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$,

2) $x=2t-4, \quad y=-t+4, \quad z=-2t-1$
$x=4t-5, \quad y=-3t+5, \quad z=-5t+5$

3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$,
$x=6t+9, \quad y=-2t, \quad z=-t+2$.

II BOB. MATEMATIK ANALIZ

1-§. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti.

1-ta'rif. Agar biror qonunga ko'ra 1,2,3,...,n,...($n \in N$) natural sonlarga $x_1, x_2, x_3,...$ xaqiqiy sonlar mos keltirilgan bo'lsa , u xolda $x_1, x_2, x_3,...$ xaqiqiy sonlar to'plamiga sonlar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Qisqacha ketma-ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishda yoki $\{x_n\}$={ $x_1, x_2, x_3,...$ } ko'rinishda yoziladi.

x_i -larga ($i = 1,2,...,n,...$) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari , x_n-ga esa ketma-ketlikning umumiy xadi deyiladi.

Misol. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},...\right\}$

$\{n^2 + 1\} = \{2,5,10,17,...\}$

$\{1 + (-1)^n\} = \{0,2,0,2,...\}$

2-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan x_n elementi uchun $x_n \le M$ (yoki $x_n \ge m$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi M (yoki m) soni mavjud bo'lsa, u xolda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni yuqoridan (pastdan) chegaralangan deyiladi.

M va m larga yuqoridan va quyi chegaralari deyiladi. xam pastdan ,xam yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

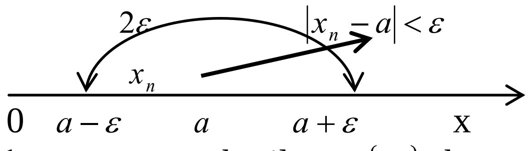
3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ (yoki $x_n \ge x_{n+1}$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik deyiladi.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi ketma-ketlik , agar $x_n > x_{n+1}$ bo'lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklarga monoton ketma-ketliklar deyiladi.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjud bo'lsaki, $n > N$ bo'lgan barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $x_n \to a$ ko'rinishlarda yoziladi.

$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga a nuqtaning ε atrofi deyiladi.

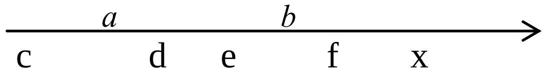


Ta'rifning geometrik ma'nosi quyidagicha: agar a berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lsa, u xolda a nuqtaning ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p xadlari joylashgan bo'ladi. Shunday xadlarning nomerlari N dan katta bo'lib, bu atrofdan tashqarida esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_1 dan x_N gacha xadlari bo'lishi mumkin.

6-ta'rif. Limiti mavjud bo'lgan ketma-ketliklarga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi. Aks xolda uzoqlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi.

1-teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklar faqat bitta limitga ega bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik ikkita a va b limitlarga ega bo'lsin, u xolda a va b nuqtalarni o'z ichiga olgan va bir-biri bilan kesishmaydigan $]c,d[$ va



$]e,f[$ intervallarni olaylik. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ bo'lsin, bu xolda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lgani uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari $]c,d[$ da bo'lib $]e,f[$ da sanoqli elementlari qoladi. Bundan ko'rinadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari
$]e,f[$ da bo'la olmaydi. Bu esa farazimizga qarama-qarshi.

2-teorema. Xar qanday yuqoridan chegaralangan kamaymaydigan va quyidan chegaralangan o'smaydigan sonli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladi va limitga ega bo'ladi.

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u albatta chegaralangan bo'ladi. Lekin aksi qarvaqt to'sri emas, ya'ni zarur lekin kifoya emas.

4-teorema. (Bol**qs** ano-Veyershtrass). Ixtiyoriy cheksiz, chegaralangan va monoton bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.

Agar cheksiz $\{x_n\}$ ketma-ketliklar yuqoridan yoki quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u albatta uzoqlashuvchi bo'ladi, ya'ni chekli limitga ega bo'lmaydi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topish mumkin bo'lsaki,
barcha $n > N$ lar uchun $|x_n - 0| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer mavjud bo'lsaki,barcha $n \ge N$ lar uchun $|x_n| \ge M$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

Sonli ketma-ketliklarning limiti uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3^0. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0)$

Misollar.

1. $x_n = \dfrac{1}{n}$. 2. $x_n = \sqrt{n}$. 3. $x_n = \dfrac{n}{4+n^2}$. 4. $x_n = (-1)^n n$.

5. $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.   6. $x_n=\frac{3^n}{(n+1)!}$.   7. $x_n=\frac{n^2}{2^n}$.   8. $x_n=\frac{3^n}{n^3}$.

9. Agar $\{x_n\},\{y_n\}$ chegaralangan ketma-ketliklar bo'lsa , u holda $\{x_n \pm y_n\},\{x_n, y_n\}$ ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligini ko'rsating.

Quyidagi ketma-ketliklarning o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishini aniqklang. (10-18).

10. $x_n=2^n$.   11. $x_n=\frac{2}{n+2}$.   12. $x_n=\sqrt{n}$.   13. $x_n=\log_{(n+1)}2/$

14. $x_n=\frac{n}{n+1}$.   15. $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{n}}$.   16. $x_n=\frac{n}{2^n}$.   17. $x_n=\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

18. $x_n=\frac{n!}{n^n}$.

Quyidagi sonlar ketma-ketliklarning limitni toping.(19-37).

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+2}$.   20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+2}{n}}$.   21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)}{n^2+1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n+2)^2}{(n-1)^3}$.   23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3-(n+1)^3}{n^2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+2(n+1)!}{(n+2)!}$.   25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n},(a>1)$.   27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3*3^n}{3*2^n+5+3^n}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+....+(n-1)}{n^2}\right)$.   29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+....+\frac{1}{n^*(n+1)}\right)$.   31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+....+\frac{1}{(2n-1)*(2n+1)}\right)$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{2n}\right)$.

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{3^n}}$.   34. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.   35. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1})$.   36. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+n+1}-\sqrt{n^4+1})$.   37. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$.

2-§. Funksiya, uning limiti va uzluksizligi.

Elementlari xaqiqiy sonlardan iborat bo’lgan D va Ye to’plamlar berilgan bo’lib, o’zgaruvchi x miqdorning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari D to’plamda, y o’zgaruvchi miqdorning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari Ye to’plamda bo’lsin.

1-Ta’rif. Agar x o’zgaruvchining D to’plamdagi xar bir qiymatiga biror qoida yoki qonunga ko’ra y o’zgaruvchining Ye to’plamdagi faqat aniq bitta qiymati mos qo’yilgan bo’lsa, u xolda o’zgaruvchi y ni o’zgaruvchi x ning funk**s** iyasi deyiladi va odatda y=f(x) ko’rinishda yoziladi.

x ga erkli o’zgaruvchi yoki argument, y ga esa erksiz o’zgaruvchi yoki x o’zgaruvchining funk**s** iyasi deyiladi.

x o’zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlar to’plami D ga funks iyaning aniqlanish soxasi deyiladi va D(f) yoki D(u) ko’rinishda belgilanadi. Ye to’plamga esa funks iyaning o’zgarish soxasi deyiladi va Ye(f) yoki Ye(u) ko’rinishda yoziladi.

Misol. y=$\sqrt{1-x^2}$ funks iyaning aniqlanish soxasi [-1,1] to’plamdan ya’ni D(u)=[-1,1] iborat bo’ladi. O’zgarish soxasi esa Ye(u)=[0,1] bo’ladi.

2-Taqrif. Funk**s**iyaning aniqlanish soasi D dagi xar qanday x_1,x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\le f(x_2)$ kelib chiqsa, u qolda f(x) funk**s** iyani D da o’suvchi deyiladi,agar $f(x_1)\ge f(x_2)$ kelib chiqsa, funks iyani D da kamayuvchi deyiladi.

Funk**s**iyaning berilish usullari. a) x va y o’zgaruvchi miqdorlar orasidagi bos lanish matematik formulalar orqali berilishi mumkin, u xolda funk**s** iya analitik usulda berilgan deyiladi;

b) o’zgaruvchi x va y lar orasidagi bos lanish grafik usulda berilishi mumkin;

v) x va y lar orasidagi bos lanish jadval usulida yaqni argument x ning qiymatlariga mos keluvchi y ning qiymatini jadval ko’rinishda berilishi mumkin.

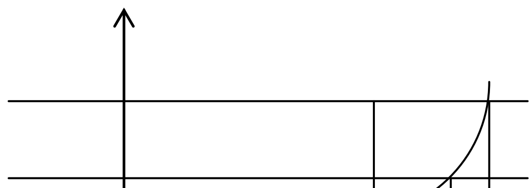
Funksiya limitining ta’rifi.

Biror berilgan a nuqtani o’z ichiga olgan xar qanday oraliqqa shu a nuqtaning atrofi deyiladi. Masalan, (a-δ ;a+δ) oraliq a nuqtaning δ atrofi deyiladi.

1-Taqrif. Xar qanday ε >0 son uchun shunday δ >0 son topish mumkin bo’lsaki, x ning 0<|x-a|<δ tengsizlikni qanoatlantirgan barcha qiymatlari uchun |f(x)-b|<ε tengsizlik o’rinli bo’lsa, b songa f(x) funk**s**iyaning a nuqtadagi (x$\to$a) limiti deyiladi va odatda

$$\lim_{x\to a} f(x)=\mathbf{b}$$

ko’rinishda yoziladi.



Bu ta'rifning geometrik maqnosi istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ soni mavjud bo'lsaki, x ning $(a-\delta;a+\delta)$ intervaldagi barcha qiymatlari uchun f(x) funks iyaning qiymati $(b-\varepsilon;b+\varepsilon)$ oraliqda, ya'ni $y=b-\varepsilon$; $y=b+\varepsilon$ to'g'ri chiziqlar orasida bo'ladi.

y

$y=b+\varepsilon$ y=f(x)

$y=b$

$y=b-\varepsilon$

0 $x=a-\delta$ $x=a$ $x=a+\delta$

1-ta'rifni quyidagicha xam ifodalash mumkin:
Har qanday $\varepsilon>0$ son uchun shunday N va M (N<a<M) sonlarni ko'rsatish mumkin bo'lib, x ning N<x<M tengsizlikni qanoatlantiradigan (x=a dan tashqari) xamma qiymatlari uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa f(x) funks iyaning a nuqtadagi $(x\to a)$ limiti deyiladi: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

2-Ta'rif. Xar kanday $\varepsilon>0$ son uchun shunday N sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, x>N tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa f(x) funks iyaning $x\to\infty$ limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

ko'rinishda yoziladi.

3-Ta'rif. Xar qanday $\varepsilon>0$ son uchun shunday M>a sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, a<x<M tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa f(x) funks iyaning a nuqtadagi $(x\to a+0$ ya'ni x a ga o'ngdan intilganda) o'ng limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b$$

ko'rinishda yoziladi.

Xuddi shuningdek, f(x)funks iyaning a nuqtada chap limiti deb, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ ga aytiladi. O'ng va chap limitlarga bir tomonlama limitlar deyiladi.

Agar f(x) funks iyaning x=a nuqtadagi limiti chekli mavjud bo'lsa, u xolda albatta

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)$$

bo'lishi shart.

Cheksiz kichik va cheksiz katta funks iyalar.

1-Ta'rif. Agar y=f(x) funks iyaning limiti $x \to a$ da nol**q** bo'lsa ya'ni $\lim\limits_{x \to a} f(x)$=0 bo'lsa ,u xolda y=f(x) funks iyani x $\to$a da cheksiz kichik funks iya deyiladi.

2-Ta'rif. Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ bo'lsa , y=f(x) funks iyani $x \to a$ da cheksiz katta funks iya deyiladi.

Misol. 1) y=x^2-1 funks iya $x \to 1$ da cheksiz kichik funks iya chunki $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1)$ =0

2) y=$\frac{1}{x^2}$ funks iya xam $x \to \infty$ da cheksiz kichik funks iya $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$ =0

3) y=x^2 funks iya esa $x \to \infty$ da cheksiz katta funks iya $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$.

Endi cheksiz kichik funks iyalarning xossalari xaqidagi quyidagi teoremalarni isbotsiz keltirib o'taylik

1-Teorema. Chekli sondagi cheksiz kichik funks iyalarning algebraik yiђindisi cheksiz kichik funks iyadir.

2-Teorema. Cheksiz kichik funks iyaning chegaralangan funks iyaga ko'paytmasi cheksiz kichik funks iya bo'ladi.

3-Teorema. Cheksiz kichik funks iyalarning ko'paytmasi cheksiz kichik funks iyadir.

4-Teorema. Cheksiz kichik funks iyaning limiti noldan farqli bo'lgan funks iyaga bo'linmasi cheksiz kichik funks iyadir.

Funks iya limiti xaqidagi asosiy teoremalar

1-Teorema. Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$=b chekli limit mavjud bo'lsa, u xolda f(x) funks iyani
b son bilan α (x) cheksiz kichik funks iya yis indisi ko'rinishda ifodalash mumkin f(x)=b+ α (x) va aksincha f(x)=b+ α (x) bo'lsa, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$=b bo'ladi.

***2-teorema.* 1)** $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$ Xususan $g(x)$=k (k - o'zgarmas son)

$$\lim_{x \to a}[\kappa \cdot f(x)] = \kappa \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

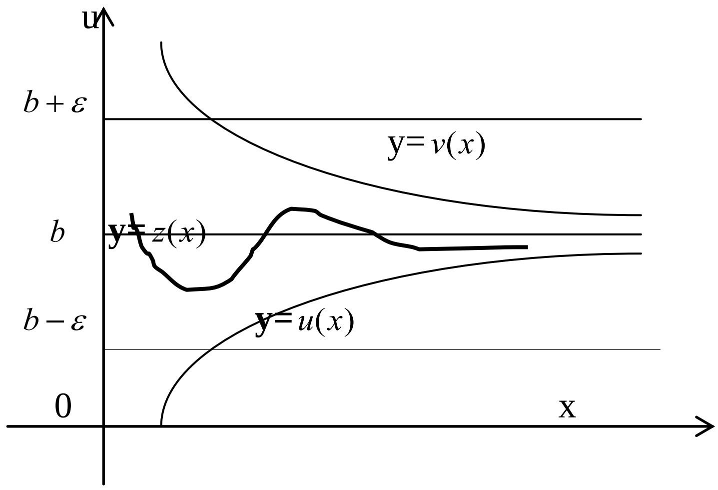
3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $(\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0)$

3-teorema. (oraliq o'zgaruvchining limiti xaqidagi teorema).
Agar $u(x)$, $z(x)$ va $v(x)$ funks iyalarning tegishli qiymatlari orasida

$$u(x) \le z(x) \le v(x)$$

tengsizliklar bajarilsa va $x \to \infty$da $u(x)$, $v(x)$ funks iyalar birgina b limitga intilsa, u xolda $x \to \infty$da $z(x)$ funks iya xam shu b limitga intiladi.

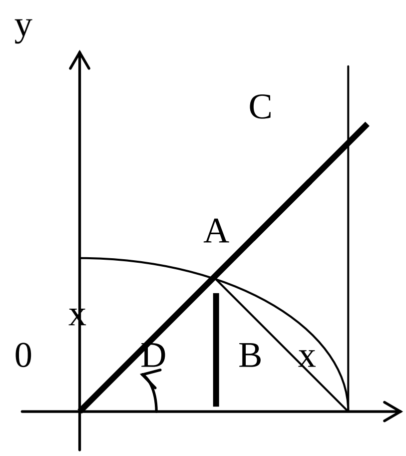
Isbotni chizmada ko'raylik.



Ajoyib limitlar.

Birinchi ajoyib limit.

1-teorema. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ bo'ladi.



Isboti. Radiusi birga teng bo'lgan birlik aylanani ko'raylik .

S_1- OAV uchburchakning yuzasi

S_2- OAV sektorning yuzasi

S_3- OSV uchburchakning yuzasi

bo'lsin.

U xolda $S_1 < S_2 <\ S_3$ bo'ladi.

OA=OB=R=1 ekanligini e'tiborga olsak

$S_1 = \dfrac{1}{2}$ OV AD= $\dfrac{1}{2}$ sinx,

$S_2 = \dfrac{1}{2}$OV AV = $\dfrac{x}{2}$ va $S_3 = \dfrac{OB\ \text{CB}}{2} = \dfrac{1}{2}$tgx

bo'ladi.

Demak sinx=$\dfrac{AD}{OA}$=AD; tgx=$\dfrac{CB}{OB}$=CB.

$\dfrac{1}{2}$sinx<$\dfrac{x}{2}$< $\dfrac{1}{2}$tgx $\Rightarrow$ 1<$\dfrac{x}{\sin x}$<$\dfrac{1}{\cos x}$$\Rightarrow$

cosx<$\dfrac{\sin x}{x}$<1 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}$cosx<$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ <$\lim\limits_{x\to 0} 1$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$=1 .

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Ikkinchi ajoyib limit.

Ta'rif. $(1+\dfrac{1}{n})^n$ o'zgaruvchi miqdorning $n\to\infty$ dagi limiti e soni deyiladi, e=2,7182818284...

2-teorema. $(1+\dfrac{1}{x})^x$ funks iyaning $x\to\infty$ dagi limiti mavjud bo'lib ye soniga teng bo'ladi.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=ye \qquad (3)$$

1. $x\to\infty$ deylik, bu xolda x ning xar qanday qiymati ikki musbat butun sonlar orasida yotadi.

$n\le x<n+1\Rightarrow \dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}\Rightarrow 1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{x}<1+\dfrac{1}{n}\Rightarrow (1+\dfrac{1}{n+1})^n<(1+\dfrac{1}{x})^n<(1+\dfrac{1}{n})^n$.

Agar $x\to\infty$ bo'lsa , n xam $n\to\infty$ chunki n x ning butun qismi, oxirgi tengsizlikdan limitga o'tsak, ikki chekkadagi limitlar ye ga intilgani uchun

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=ye$$

kelib chikadi.

2. $x\to-\infty$ da t=-(x+1) yoki x=-(t+1) almashtirish bajarsak $t\to+\infty$ da $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to\infty}(1-\dfrac{1}{t+1})^{-t-1}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^t=e.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ ekanligini xam quyidagicha xosil qilamiz:

$x=\dfrac{1}{t}$ desak $t\to\infty$ da $x\to 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^t=e.$

Amaliy mashs ulotlarda ko'p uchraydigan quyidagi limitlarni xam talabalarning bilishi maqsadga muvofiq bo'lar edi.

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{\kappa}{x})^x=ye^{-k}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\kappa}{x})^x=ye^k$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)^n-1}{x}=-n$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$

MISOLLAR.

38. Tengsizlikni eching.

a) x-4$\leq$0 b) 9-x^2 $\geq$0 v) x(x-1)<0 g) $|x+2|<2$

d) $|x-1|>1$ e) $|2x-3|<5$ j) $|x-1|<|x+1|$

39. $y(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ funksiya berilgan. $y\left(-\dfrac{1}{2}\right), \left|y\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|$ larni toping.

40. $y(x)=\sqrt{1+x^2}$ funksiya berilgan. u(-x),u($\dfrac{1}{x}$) larni toping.

41. $y(x)=2^{x-2}$ funksiya berilgan. u(0), u(-1) larni toping.

42. $y(x)=x^2$ funksiya berilgan. $\dfrac{y(b)-y(a)}{b-a}$ ni toping.

43. $y(x)=x^3$ funksiya berilgan. $\dfrac{y(x+h)-y(x-h)}{h}$ ni toping.

44. $y(x)=2x^2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x}+5x$ funksiya berilgan. $y(t)=y\left(\dfrac{1}{t}\right)$ o’rinli ekanligini ko’rsating.

45. $y(x)=a^x$ funksiya berilgan. Ihtiyoriy x uchun $y(x)*y(-x)-1=0$ ekanligini ko’rsating.

46. $y(x)=x^2-2x+3$ funksiya berilgan. $y(x)=y(-1)$ tenglamani barcha ildizlarini toping.

47. $y(x)=2x^3-5x^2-8x$ funksiya berilgan. $y(x)=y(2)$ tenglamani barcha ildizlarini toping.

Quyidagi funksiyalarining aniqlanish sohalarini toping.(48-67).

48. $y=x^2+2x$ 49. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ 50. $y=\sqrt{4-x^2}$

51. $y=x+\dfrac{1}{x}$ 52. $y=|x|+3$

56. $y=\lg(1-x^2)$ 57. $y=\log_x(x-\dfrac{1}{2})$ 58. $y=arcCos(x+2)$

59. $y=\sqrt{Cosx}$

60. $y=\sqrt{1-Cosx}$ 61. $y=\ln\sin x$ 62. $y=\frac{e^x}{x}$

63. $y=\lg\frac{2+x}{2-x}$

64. $y=\frac{x+1}{arcSin(x-1)}$ 65. $y=arcSin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$ 66. $y=\log_{\cos x}\sin x$

67. $y=ctgx*tgx$

Quyidagi funksiyalarining juft yoki toqligini aniqlang .(68-82)

68. $y=x^4-2x^2$ 69. $y=x-\frac{x^3}{3}$ 70. $y=x+\frac{1}{x}$ 71. $y=x*\sin x$

72. $y=\cos x+|x|$ 73. $y=x*\sin^2 x-x^3$ 74. $\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ 75. x_n $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$

76. $y=2^{-x^2}$ 77. $y=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 78. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 79. $y=1-\cos x$

80. $y=x^2*\sin\frac{1}{x}$ 81. y=$\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$ 82. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

Quyidagi funksiyalarining eng kichik musbat davrini aniqlang .(83-91)

83 $y=\sin^2 x$ 84. $y=\sin 2x$ 85. $y=\cos\sqrt{2}x$ 86. $y=\sqrt{tgx}$

87 $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}$ 88. $y=tg\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\sin x$ 89. $y=3\cos\left(x+\frac{x}{4}\right))$

90. $y=a*\sin kx$ 91. $y=tg2x+\sin\frac{x}{2}$

Quyidagi limitlarni toping.(92-140)

92. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+2}$ 93. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x+5}$ 94. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2*(2x+3)}{x^3+1}$

95. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ 96. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 97. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

98. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ 99. $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ 100. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$

101. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$ 102. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ 103. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

104. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ 105 . $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ 106. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

107. $\lim\limits_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ 108. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ 109. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

110. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-1}{h}$ 111. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{h}$ 112. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)$

113. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$ 114. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$ 115. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})$

116. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ 117. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ 118. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 3x}$

119. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$ 120. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 121. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

122. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ 123. $\lim\limits_{x\to 0}ctg\,2x * ctg(\dfrac{\pi}{2}-x)$ 124. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$

125. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ 126. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha^n}{(\sin\alpha)^m}, n>m$ 127. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha\ x}{\sin\beta x}$

128. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$ 129. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x$ 130. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

131. $\lim\limits_{x\to\infty}$ x(ln(x+3)-lnx) 132 . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{x}$ 133. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

134. $\lim\limits_{x\to\infty}x(3^{\frac{1}{x}}-1)$ 135. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ 136. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

137. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\sin x}$ 138. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$ 139. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

140. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Argument va funksiya orttirmasi.

Berilgan u=f(x) funksiyaning x=a nuqtadagi qiymati $y_0=f(x_0)$ bo'lsin. Argument x ning boshlansich a va biror x qiymatlarini ko'raylik. x-a ayirma argument x ning a nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx orqali belgilanadi.

$u-u_0=f(x)-f(a)$ ayirmaga f(x) funksiyaning x=a nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δu orqali belgilanadi.

$\Delta x=x-a$, $\Delta u=u-u_0=f(x)-f(a)$ yoki $x=a+\Delta x$, $u=u_0+\Delta u$ bo'lib $\Delta u= f(a+\Delta x)-f(a)$.

Misol. $u=x^2$ funksiyaning x=a nuqtadagi funksiya orttirmasini xisoblang.

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=(x+a)^2-a^2=2a\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

Endi funksiyaning uzluksizligiga o'taylik. y=f(x) funksiya biror x=a nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lib, x=a da u=f(a) bo'lsin.

1-ta'rif. Agar f(x) funksiyaning $x\to a$ da limiti mavjud bo'lib $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ bo'lsa f(x) funksiya x=a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Demak f(x) funksiya x=a nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2-Ta'rif. Agar u= f(x) funksiyaning x=a nuqtadagi o'ng limiti $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)= f(a)$ yoki chap limiti $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)= f(a)$ lar mavjud bo'lsa, u xolda f(x) funksiyani x=a nuqtada o'ngdan yoki chapdan uzluksiz deyiladi.

3-ta'rif. Agar f(x) funksiya biror intervalning xar bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiyani shu intervalda uzluksiz deyiladi.

4-ta'rif. Agar f(x) funksiya x=a nuqtada aniqlanmagan bo'lsa yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)$limit mavjud bo'lmasa yoki (1) tenglik o'rinli bo'lmasa, f(x) funksiyani a nuqtada uzlukli (yoki a nuqtada uzilishga ega) deyiladi. a nuqtaga f(x) funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)= f(a+0)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)= f(a-0)$ chekli limitlar mavjud bo'lib, lekin ular o'zaro teng bo'lmasa, f(x) funksiyani a nuqtada I -tur uzilishga ega deyiladi.

1-tur uzilishga kirmaydigan, barcha uzilishlarga II -tur uzilish deyiladi.

Misol.1. $f(x)=\sqrt{x+4}$ funksiyaning x=5 nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsating. $f(5)=\sqrt{5+4}=3$; $\lim\limits_{x\to 5} f(x)= \lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x+4}=\sqrt{5+4}=3$; $\lim\limits_{x\to 5} f(x)= f(5)=3$.

2. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Demak funksiya x=0 nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning uzluksizligi.

Teorema. Agar $f_1(x), f_2(x)$ funksiyalar x=a nuqtada uzluksiz bo'lsa,u xolda

$f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \bullet f_2(x)$ va $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ($f_2(a) \neq 0$) funksiyalar xam shu x=a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Endi kesmadagi uzluksiz funksiyalarning quyidagi ikkita xossasini ko'rib o'taylik.

1-teorema. Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo'lsa, u xolda bu funksiya shu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

2-teorema. Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo'lib, bu kesma uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u xolda a va b nuqtalar orasida xech bo'lmaganda shunday bir x=s (a<s<b) nuqta topiladiki, bu nuqtada f(c)=0 bo'ladi.

MISOLLAR.

Quyidagi funksiyalarining uzluksizligini ko'rsating.(141-147)

141. $y = x$ 142. $y = 1 + x^2$ 143. $y = \sqrt{x}$ $x \geq 0$

144. $y = \sin x$ 145. $2x^3 + 2$ 146. $y = |x|$

147. $y = shx$

a ning qiymatida f(x) funksiya uzluksiz bo'ladi. (148-151)

148. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, агар\ x \neq 2\ булса \\ a, агар\ x = 2\ булса \end{cases}$ 149. $f(x) = \begin{cases} x + 1, агар\ x \leq 1\ булса \\ 3 - ax^2, агар\ x > 2\ булса \end{cases}$

150. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c^x - 1}{xd}, агар\ x \neq 0\ булса \\ a, агар\ x = 0\ булса \end{cases}$ 151. $f(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, агар\ x \neq 0\ булса \\ a, агар\ x = 0\ булса \end{cases}$

152. a va b ning qanday qiymatlarida f(x) funksiya uzluksiz bo'ladi.

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, агар\ x \leq -\dfrac{\pi}{2}\ булса \\ a\sin x + b,\ агар -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\ булса \\ \cos x,\ агар\ x \geq \dfrac{\pi}{2}\ булса \end{cases}$$

Quyidagi funksiyalarining uzilish nuqtalarini aniqqlang.(153-169)

153 $y = \dfrac{1}{x}$ 154. $y = \dfrac{x}{x + 2}$ 155 . $y = \dfrac{x + 1}{x^3 - x^2}$

156. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ 157. $y = \dfrac{1}{\cos x}$ 158. $y = \dfrac{x}{\sin x}$

159. $y=[x]$ 160. $y=\operatorname{sgn} x$ 161. $y=2^{\frac{1}{x}}$

162. $y=\begin{cases} x+1, \text{ agar } x>0, \\ x^2, \text{ agar } x\le 0. \end{cases}$ 163. $y=\begin{cases} \dfrac{Sin\, x}{x}, \text{ agar } x\ne 0, \\ 2, \text{ agar } x=0. \end{cases}$

164 $y=\begin{cases} x^2, \text{ agar } x\le 3, \\ 2x+1, \text{ agar } x>3. \end{cases}$ 165. $y=x-[x]$

166. $y=\dfrac{|x|}{x}$ 167. $y=\dfrac{x+1}{|x+1|}$

168. $y=arctg\,\dfrac{a}{x-a}$ 169. $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

170. $y=\dfrac{1}{\lg|x|}$ funksiya nechta uzilish nuqtaga ega.

Quyidagi funksiyalarining nechanchi tur uzilishga ega. (171-178)

171. $y=\dfrac{1}{3-x}, x_0=3$ 172. $y=\dfrac{1}{x^2}, x_0=0$

173. $y=ctgx, \quad x_0=\pi$ 174. $y=[x]$, $x=1$

175. $y=\operatorname{sgn} x, \quad x_0=0$ 176. $y=(-1)^{[x]}, \quad x_0=0$,

176. $y=\dfrac{1}{1+2^{\left[\frac{1}{x}\right]}}, \quad x_0=0$ 178. $y=\dfrac{1}{\ln x}, x_0=1$

3-§. FUNKSIYANING XOSILASI VA DIFFERENSIALI.

Funksiyaning xosilasi.

Ta'rif. Agar u= f (x) funksiyaning $x=x_o$ nuqtadagi orttirmasi Δ u ning argument orttirmasi Δ x ga nisbatining Δ x nolga intilganda chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limit f (x) funksiyaning x_o nuqtadagi xosilasi deb ataladi va u' yoki u'(x) yoki $f(x_o)$ yoki $\frac{dy}{dx}$ yoki $\frac{df}{dx}$ ko'rinishlarda belgilanadi.

Demak ta'rifga ko'ra $f'(x_o)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Misollar.

1.u=f(x)=s=const bo'lsin. Δ u=f(x+Δ x)-f(x)=s-s=0 $u'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$

2.u=f (x)=x bo'lsin. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$; $u'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$

3.u=x^2 funksiyaning x=3 nuqtadagi xosilasini toping;

$u_o=9;u_o+\Delta u=(3+\Delta x)^2=9+6\Delta x+(\Delta x)^2$

$u'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(6+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6;$

4.u=f(x)=$\sqrt{x}$,(x>0)

$u'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

1-ta'rif. Agar u=f(x) funksiya $x=x_o$ nuqtada chekli $f'(x_o)$ xosilaga ega bo'lsa, uni shu nuqtada differensiallanuvchi funksiya deyiladi.

2-ta'rif. Agar u=f(x) funksiya ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiyani shu kesmada differensiallanuvchi deyiladi.

Teorema. Agar u=f(x) funksiya $x=x_o$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Misol. u=$\frac{1}{x}$ giperbolaning $x=x_o=1$ ya'ni (1;1) nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

$u(x_o)=f(1)=1$; $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$; $f'(1)=-1$

u=1-1(x-1) $\Rightarrow$ u=2-x.

Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning xosilasi.

Teorema. Agar u(x) va v(x) funksiyalar x$\in$(a,b) nuqtada u(x) va v(x) xosilalarga ega bo'lsa, u xolda ularning algebraik yisindisi, ko'paytmasi va bo'linmasi shu x nuqtada xosilaga ega bo'lib, quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$(u\pm v)'=u'\pm v';$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \quad (v(x)\neq 0)$$

Teskari funksiyaning xosilasi.

Teskari funksiyaning mavjudligi xaqidagi teoremani isbotsiz keltirib o'taylik.

1-teorema. Agar u=f(x) funksiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu kesmada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, bu funksiyaga teskari bo'lgan x=φ(u) funksiya mavjud bo'ladi. u=f(x) ga teskari bulgan funksiyani topish uchun tenglamani x ga nisbatan yechish kerak.

2-teorema. Agar u=f(x) funksiya x nuqtada chekli f '(x) $\neq 0$ xosilaga ega bo'lsa, u xolda bu funksiyaga teskari bo'lgan x=φ(u) funksiya xam shu nuqtada $\varphi'(u)=\dfrac{1}{f'(x)}$ xosilaga ega bo'ladi.

Murakkab funksiyaning xosilasi.

Agar u o'zgaruvchi u o'zgaruvchining u=f(u) funksiyasi bo'lib, u esa o'z navbatida x ning funksiyasi u=φ(x) bo'lsa, u xolda u=f(φ(x)) funksiyani x ning murakkab funksiyasi deyiladi.

Teorema. Agar u=φ(x) funksiya o'zgaruvchi x nuqtada $u_x'=\varphi'(x)$ xosilaga, u=f(u) funksiya esa o'zgaruvchi u bo'yicha $u_u'=f'(u)$ xosilaga ega bo'lsa, u xolda u=f(φ(x)) murakkab funksiya xam shu x nuqtada

$$y_x' = f_u'(u)\cdot\varphi'(x)$$

xosilaga ega bo'ladi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning xosilasi.

Agar tenglamamiz $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lib, φ(t), ψ(t) funksiyalar differensiallanuvchi va $\varphi'(t)\neq 0$ bo'lsa $y'_x=\frac{\psi_t'(t)}{\varphi'_t(t)}$ ya'ni $y'_x=\frac{y_t'(t)}{x'_t(t)}$ formula o'rinli bo'ladi.

Asosiy elementar funksiyalarning xosilalari.

1. y=x^n (x>0) darajali funk**s**iyaning xosilasini topaylik. Funk**s**iya xosilasining ta'rifiga ko'ra Δ u=(x+Δ x)^n-x^n=x^n[$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n$ -1yo] ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\Delta x}=\frac{x^{n-1}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{x}=n$$ ajoyib limitni e'tiborga olsak

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

y'=$(x^n)'$=nx^{n-1}.

2. y=a^x (a>0 , $a\neq 1$) ko'rsatkichli funk**s**iyaning xosilasi.

Δ y=$a^{\Delta x+x}$-a^x= a^x ($a^{\Delta x}$-1);

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x},$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ =ln$a$ ajoyib limitga ko'ra

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Demak, y'=$(a^x)'=a^x\ln a$

3. y= $\log_a x$ (a>0, a$\neq$1) logarifmik funk**s**iyaning xosilasi xam y'=$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$ formula bilan topiladi.

Agar $\log_a e=\frac{1}{\ln e}$; $\log_e a=\ln a$; $\log_e x=\ln x$; $\log_x e=\frac{1}{\ln x}$. ekanligini e'tiborga olsak

$y'=(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ kelib chiqadi.

Agar a=ye desak lna=lne=1 bo'lib, u=lnx ; $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ bo'ladi.

4. y=sinx funk**s**iyanig xosilasini topish uchun x ga Δ x orttirma bersak u xam Δ u orttirma olib $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos[\frac{(2x+\Delta x)}{2}]$,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\right]=\cos x.$$

$y'=(\sin x)'=\cos x$

xuddi shuningdek o'rta maktab dasturidan bizga ma'lum bo'lgan boshqa trigonometrik funk**s**iyalarning xosilalarini xisoblash mumkin:

$$(\cos x)'=-\sin x\ ;\ (\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\ ;\ (\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Endi y=arcsinx teskari trigonometrik funk**s**iyaning xosilasini xisoblashni ko'raylik.

y=arcsinx funk**s**iya x=siny funk**s**iyaga teskari funk**s**iya bo'lgani uchun, teskari funk**s**iyalarning xosilalariga ko'ra

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (-1<x<1).$$

Xuddi shuningdek

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ (\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}\ ;\ (\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

6. y=lnx bo'lsa, $y'=\frac{1}{x}\cdot x'=\frac{1}{x}$; Agar y=lnu bo'lib u=f(x) bo'lsa,

$$y'=(\ln u)'=\frac{u'}{u}=\frac{f(x)'}{f(x)};$$

Agar $y=u^{v(x)}(x)$ bo'lsa, lny=vlnu – bundan xosila olsak

$\frac{y'}{y}=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}$, $y'=u^{v}[v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}]$.

Differensiallash qoidalari:

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 5. $y=f(u),u=\varphi(x),y=f[\varphi(x)]$ bo'lsa, $y_x'=y_u'\cdot u_x'$ yoki $y_x'=f_x'(u)\cdot\varphi_x'(x)$.

2. (u·v)'=u'v+uv'   6.y=f(x) va x=φ(y) funksiyalar o'zaro teskari bo'lsa,

y$_x$'=$\frac{1}{x_y'}$.

3. (Cu)'=C·u'   (C-o'zgar.)   7. $(u^v)'=vu^{v-1}\cdot u'+u^v \ln u\cdot v'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ 8. $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ \alpha\le t\le\beta \end{cases}$ bo'lsa, y$_x$'= $\frac{\psi_x'}{\varphi_x'}$ yoki y$_x$'=$\frac{y_t'}{x_t'}$.

Differensial va xosila orasidagi bog'lanish.

Agar u=f(x) funksiya [a,b] kesmada differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiyaning x $\in$[a,b] nuqtadagi xosilasi f '(x)= $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (1) tenglik bilan aniqlanar edi. Limitning ta'rifiga ko'ra $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat f '(x) ga intiladi. Boshqacha aytganda ular orasidagi farq cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Shuning uchun

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$=f '(x)+$\alpha\Rightarrow\Delta$u=f '(x)-$\Delta$x+ α Δx ($\Delta x\to 0$ da $\alpha\to 0$).

Bundan ko'rinadiki funksiya orttirmasi Δu ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'lar ekan. Shularning birinchisi f '(x) Δx ga funksiyaning differensiali deyiladi va dy orqali belgilanadi.

dy=f '(x) Δx   (2)

desak (2) dan dx=x'Δx $\Rightarrow$ dx=Δx ekanligini e'tiborga olsak

du=f '(x)dx   (3)

yoki

$\frac{dy}{dx}$=f '(x)   (4)

(4) dan ko'rinadiki f '(x) xosilani funksiya differensialining argument differensialiga nisbati deb qarash mumkin ekan.

Differensialning asosiy hossalari.

1.dC=0(C-o'zgarmas)

2..d(Cu)=Cdu

3.d(u+v)=du+dv

4.d(uv)=vdu+udv

5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$ (v(x) $\neq$0)

Differensialning taqribiy xisoblarga tatbiqi.

Agar y=f '(x)= $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa,

Δy=f '(x) Δx+ $\alpha\Delta$x (Δx$\to$0 da $\alpha\to 0$ cheksiz kichik funksiya)

yoki

Δ y=dy+ $\alpha\Delta$ x $\Rightarrow$ $\frac{\Delta y}{dy}$=1+$\frac{\alpha\Delta x}{dy}$=1+ $\frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x}$=1+$\frac{\alpha}{f'(x)}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\alpha}{f'(x)})=1 \Rightarrow \Delta y \approx dy \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$

yoki

$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$

Misol.

$\sin 31^0=\sin(30^0+1^0)=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180})$; $\Delta x=\frac{\pi}{180}$; $x+\Delta x=30^0+1^0=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$;

$\sin(30^0+1^0)=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}) \approx \sin\frac{\pi}{6}+(\sin x)'_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}$=0,515.

Yuqori tartibli xosila

Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada differensiallanuvchi bo’lsa, u xolda bu funksiyaning xosilasi f '(x) umuman aytganda yana x ning funksiyasi bo’ladi. Shuning uchun undan x bo’yicha xosila olsak, xosil bo’lgan xosilaga berilgan funksiyadan olingan ikkinchi tartibli xosila deyiladi va u'' yoki f ''(x) lar bilan belgilanadi. Shunday qilib u=f(x) funksiyaning ikkinchi tartibli xosilasi

u''= f ''(x)=(u')'=(f '(x))' .

u''=f ''(x) ikkinchi tartibli xosiladan olingan xosilaga u=f(x) funksiyaning uchinchi tartibli xosilasi deyiladi:

u'''=f '''(x)=(f ''(x))'

Shu jarayonni n marta davom ettirsak u=f(x) funksiyaning n tartibli xosilasi $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=(u^{(n-1)})' = (f^{(n-1)}(x))'$ ko’rinishda bo’ladi.

Misol. $u=f(x)=2x^4+3x^3-5x^2+6x-8$

$u'=8x^3+9x^2-10x+6$

$u''=24x^2+18x-10$

$u'''=48x+18.$

Agar u(x), v(x) funksiyalar differensiallanuvchi bo’lib, $u^{(n)}(x)$, $v^{(n)}(x)$ xosilalarga ega bo’lsa, u xolda

1. $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C-o’zgarmas son)
2. $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$
3. $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)u^{(n-2)}v''}{1\cdot 2}+ ...+uv^{(n)}$.

tengliklar o’rinli bo’ladi. Oxirgi tenglikka Leybnis formulasi deyiladi.

Endi yuqori tartibli qosila tushunchasi kabi,yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritaylik. Agar u=f(x) funksiya differensiallanuvchi bo’lsa, uning differensiali dy=f '(x)dx=u'dx formula bilan xisoblanishini ko’rgan edik. Bu yerda x ga faqat f '(x) bosliq bo’lib ,dx bosliq bo’lmaydi, chunki dx=Δ x bo’lib argument orttirmasini ifodalaydi. Shuning uchun dy differensialidan yana differensial olsak, xosil bo’lgan differensialga u=f(x) funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ lar bilan belgilanadi:

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=d(y')dx=(y')'dxdx=y''dx^2$$

$$d^2y=y''dx^2$$

yoki $d^2y=f''(x)dx^2$.

Xuddi shuningdek uchinchi,to'rtinchi va xokazo tartibli differensiallarni topish mumkin:

$$d^3y=y'''dx^3,\ d^4y=y^{1V}dx^4, ...,\ d^ny=y^{(n)}dx^n .$$

Misol. $u=4x^5-3x^2+6$, $d^4y=q$

$dy=(20x^4-6x)dx$, $d^2y=(80x^3-6)dx^2$, $d^3y=240x^2dx^3$, $d^4y=480xdx^4$

MISOLLAR.

Quyidagi funksiyalarining uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ munosabatni toping. (179-181)

179. $y = 2x^3 - x^2 + 1 \quad x = 1, \quad \Delta x = 0{,}1$

180. $y = \frac{1}{(x^2 - 2)^2} \quad x = 1, \quad \Delta x = 0{,}4$

181. $y = \frac{1}{x} \quad x = 2, \quad \Delta x = 0{,}01$

Hosila taъrifidan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilarini toping.(182-196)

182. $y = x$ 183. $y = 2x + 1$ 184. $y = x^2$

185. $y = \sqrt{x}$ 186. $y = x^3$ 187. $y = \frac{1}{x}$

188. $y = \sin x$ 189. $y = \cos x$ 190. $y = ctgx$

191. $y = e^{2x}$ 192. $y = a^x$ 193. $y = 3^{x-1}$

194. $y = \ln x$ 195. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 196. $y = x * \sin x$

197. f(x) funksiya nuqtada hosilga ega bo'lsa, u holda

$\lim\limits_{x \to a} \frac{x * f(a) - a * f(x)}{x - a} = f(a) - a * f'(a),$ bo'lishini isbotlang.

198. $y = \sin x$ funksiya grafigiga (π;0) nuqtada o'tkazilgan o'rinma abssisalar o'qini qanday burchak ostida kesadi.

199. $y = \frac{1}{x}$ va $y = x^2$ funksiyalar kesishish nuqtasidan o'tkazilgan urinmalarining burchak koefisientlarini toping.

200. $y = \sqrt{x}$ va $y = \frac{1}{x}$ funksiyalar qanday burchak ostida kesishadi.

Quyidagi funksiyalarining hosilarini toping.(201-259)

201. $y = x + 1$ 202. $y = x^2 + 2x$ 203. $y = ax^2 + bx + c$

204. $y = x^4 - 3x^2$ 205. $y = \frac{2}{3}x^3$ 205. $y = (x - 2)^2$

207. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ 208. $y = x(\sqrt{x} + 1)$ 209. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}(x - 1)$

210. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ 211. $y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$ 212 $y=\frac{x+2}{x\ \ +1}$

213. $y=\frac{1}{x}+e^x$ 214. $y=e^{3x}$ 215. $y=\frac{1}{2}e^{2x}+2x$

216. $y=a^{x+1}$ 217. $y=4^{2x}+4^{-2x}$ 218. $4x^{-5}+5x^{-4}$

219. $y=x^2*2^x$ 220. $y=\sin\frac{x}{2}$ 221. $y=\cos 3x$

222. $y=2\sin x+\cos x$ 223. $y=\ln x+1$ 224. $y=x*\ln x$

225. $y=x*\sin x$ 226. $y=tg5x$ 227. $y=tg2x-ctgx$

228. $y=x^2*10^{2x}$ 229. $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ 230. $y=\sin^2 x$

231. $y=\arcsin 2x$ 232. $y=x*\arccos x$ 233. $y=arctg\,x^2$

234. $y=\arccos 2x$. 235. $y=\frac{x}{\ln x}$ 236. $y=e^{ax}(a*\sin ax-a*\cos ax)$

237. $y=\sqrt{x}\ e^{\sqrt{x}}$ 238. $y=e^{\sin x}$ 239. $y=x-arctgx^2$

240. $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$ 241. $y=\arcsin e^{3x}$ 242. $y=2\sin\frac{1}{x}$

243. $y=\cos\sqrt{x^2-1}$ 244. $y=\sin(\sin x)$ 245. $y=\arccos e^x$

246. $y=x*\sin 2^x$ 247. $y=\sqrt{x^2-a^2}$ 248. $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$

249. $y=\sin\sqrt{x}$ 250. $y=\ln\sin x$ 251. $y=\log_2(x+1)$

252. $y=\log_x 3$ 253. $y=\log_x 3^{\ x}$ 254. $y=arctg\ln x$

255. $y=\ln(x*\sin x)$ 256. $y=x^x$ 257. $y=(\sin x)^x$

258. $y=(\cos x)^{\sin x}$ 259. $y=(arctgx)^{2x}$

260. $y=e^{-x}$ funksiya uchun f(0)+xf’(0) ni toping.

261. $y=(x+1)*\ln(x+1)$ funksiya uchun f(0)+f’(0) ni toping.

262 $y(x)=tgx$. va $\varphi(x)=\ln(1-x)$ funksiyalar uchun $\frac{y'(0)}{\varphi'(0)}$ ni toping.

263. $y = sh\frac{x}{2} + ch\frac{x}{2}$ funksiyalar uchun f(0)+f'(0) ni toping.

264. Qanday nuqtalarda $y = \frac{x}{x+1}$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma OX o'qning musbat yo'nalishi bilan 45^0 li burchak tashkil etadi?

265. Qanday nuqtalarda $y = \ln(x-1)$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma OX o'qning musbat yo'nalishi bilan 60^0 li burchak tashkil etadi?

266. Qanday nuqtalarda $y = (3 - x^2)e^x$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar OX o'qga parallel bo'ladi?

267. Qanday nuqtalarda $y = x^2 \ln x$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar OX o'qga parallel bo'ladi?

268. Qanday nuqtalarda $y = \ln(4x-1)$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar u=x to'sri chiziqga parallel bo'ladi?

269. Qanday nuqtalarda $y = x^3 - 3x^2 + 2$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar $y = -3x$ to'sri chiziqga parallel bo'ladi?

270. Qanday nuqtalarda $y = \sin x$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar $x - 10 = 0$ to'g'ri chiziqga perpendikulyar bo'ladi?

271. Qanday nuqtalarda $y = \ln x$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar $2y + x + 1 = 0$ to'g'ri chiziqga perpendikulyar bo'ladi?

272. $y = x * \ln x$ funksiya $x(y-1)' = y + x$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating.

273. $y = x * e^{-x}$ funksiya $xy' = (1-x)y$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating.

274. $y = \frac{1+\ln x}{x}$ funksiya $x^2 y' = 1 - xy$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating.

$y = f(x)$ funksiya grafigiga berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing. (275-283)

275. $y = x^2 \quad x = 1$

276. $y = e^x, \quad x = 0$

277. $y = \frac{8}{4+x^2} \quad x = 2$

278. $y = \sin x, \quad x = \frac{\pi}{4}$

279. $y = \sqrt{4-x^2} \quad x = 1$

280 $y = \ln(x+1), \quad x = 0$.

281. $y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x = 1$

282. $y = arctg 2x, \quad x = 0$

283. $y = \ln\frac{x-1}{x+1}, \quad x = 2$

284. $y = \sin x$ egri chiziq OX o'qi bilan qanday burchak ostida kesishadi.

285. $y = \frac{x^2}{2}$ va $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ egri chiziqlar qanday burchak ostida kesishadi.

286. $y = x^2 - x$ ga OX o'qi bilan kesishgan nuqtalarida o'tkazilgan urinmalar topilsin.

287. $y^2 = 4 - x$ ga OU o'qi bilan kesishgan nuqtalarida o'tkazilgan urinmalar topilsin.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarning $y' = \frac{dy}{dx}$ hosilarini toping. (288-295)

288 . $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$ 289. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t-1} \\ y = \dfrac{t}{t-1} \end{cases}$ 290. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

291. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$ 292. $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = 2^{t-1} \end{cases}$ 293. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

294. $\begin{cases} x = a(\cos t + t*\sin t) \\ y = a(\sin t - t*\cos t) \end{cases}$ 295. $\begin{cases} x = \ln(1+t^{2)} \\ y = t - arctgt \end{cases}$

Oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyalarning $y' = \dfrac{dy}{dx}$ hosilarini toping.(296-309)

296 $3x - 2y = 1.$ 297. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 298. $x^3 + y^3 = a^3$

299. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 300. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 301. $x - 2\cos y = 1$

302. $x^2 * y = \sin y$ 303. $arctg(x+y) = x$ 304. $y = e^{x-y}$

305. lny+ $\dfrac{x}{y} = 1$ 306. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = arctg\,\dfrac{y}{x}$ 307. $x = y + arctgy$

308. $e^x - e^{-x} = 3$ 309. $y*\ln y = x*\ln x$

Quyidagi funksiyalarni hosilacini toping. (310-317)

310. $y = x^2 - 2x$ 311. $y = x + 3*\sin x$ 312. $y = e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{x}{2}$

313. $y = e^{\sin x}$ 314. $y = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 315. $y = x*e^{-x}$

316. $y = \ln(x^2 - 1)$ 317. $y = \arccos 2^x$

Quyidagi funksiyalarni ikkinchi tartibli hosilarini toping.(318-332)

318. $y = x^5 + 6x^3$ 319. $y = \sin x$ 320. $y = a^x$

321. $y = x*e^x$ 322. $y = x\sqrt{1+x^2}$ 323. $y = e^{2\cos x}$

324. $y = \cos^2 x$ 325. $y = (1+x^2)*arctgx$ 326. $y = \ln x^2$

327. $y = x*\ln x$ 328. $y = \sin x + \cos x$ 329. $y = \ln\cos x$

330. $y = \ln\sqrt{1+x}$ 331. $y = \sin e^x$ 332. $y = x*arctgx$

Quyidagi funksiyalarni n-tartibli hosilarini toping. (333-342)

333. $y = \dfrac{1}{2^n}e^{2x}$ 334. $y = x^n$ 335. $y = e^{ax}$

337. $y = (a*x+b)^n$ 338. $y = \ln(1+x)$ 339. $y = e^{-x}$

340. $y = x*e^x$ 341. $y = \sin x$ 342. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

Quyidagi funksiyalarni uchun $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ni toping. (343-352)

343. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ 344. $\begin{cases} x = 2t^2 + 2 \\ y = 3t^3 + 3 \end{cases}$ 345. $\begin{cases} x = a * \cos t \\ y = a * \sin t \end{cases}$

346. $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$ 347. $\begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$ 348. $\begin{cases} x = arctgt \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

349. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ 350. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ 351. $\begin{cases} x = a^*(t - \sin t) \\ y = a^*(1-\cos t) \end{cases}$

352. $\begin{cases} x = e' \cos t \\ y = e' \sin t \end{cases}$

Quyidagi funksiyalar uchun y'' ni toping. (353-358)

353. $3x + 4y = 2$ 354. $x^2 + y^2 = 4$ 355. $x^2 + xy = 2$
356. $e^{x+y} = x$ 357. $y = x + arctgy$ 358. $y = x + \ln y$

359. $y = e^x \sin x$ funksiya $y'' - 2y' + 2y = 0$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.
360. $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ funksiya $2y'^2 = (y-1)y''$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.
361. $y = \sqrt{2x - x^2}$ funksiya $y^3 y'' + 1 = 0$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.
362. $y = \sin(n * \arcsin x)$ funksiya $(1\text{-x}^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.
363. $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ funksiya $\text{y}''' - 13y' - 12y = 0$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.
364. $(a + b * x)e^{\frac{y}{x}} = x$ funksiya $x^3 y''' = x(y' - y)^2$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.
365. $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$ parametrik ko’rinishda berilgan funksiya 36u$''(y - \sqrt{3}x) = x + 3$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.
366. $y = e^x \cos x, \quad y = e^x \sin x$ parametrik ko’rinishda berilgan funksiya $\text{y}''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$ tenglamani qanoatlantirishni ko’rsating.

Quyidagi funksiyalarni Teylor formulasi bo’yicha x_0 nuqtaning atrofida $(x- x_0)^3$ hadgacha yoying.(367-374)

367. $f(x) = 2x^3, \quad x_0 = 1$. 368. $f(x) = x^4 - 3x^2, \quad x_0 = 2$
369. $f(x) = e^x, \quad x_0 = -1$ 370 $f(x) = 2^x, \quad x_0 = 1$
371. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 2$ 372. $f(x) = xe^x, \quad x_0 = -1$
373. $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$ 374. $f(x) = \sin(2x - 2), \quad x_0 = 1$

Quyidagi funksiyalarni Makloren formulasi bo’yicha x^n hadgacha yoying. (375-382)

375. $y = e^{2x}$ 376. $y = e^{5x-1}$

377. $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 378. $y=a^x$

379. $y=x*e^x$ 380 $y=\sin x$.

381 $y=3^{x+2}$ 382. $y=\cos 2x$

4-§. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi.
Lopital qoidasi.

Ba'zi xollarda $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ kasr ko'rinishidagi funksiyalarni tekshirganimizda $x\to+\infty, x\to-\infty, x\to a, x\to 0$ intilganda $\dfrac{0}{0}$ yoki $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga uchraymiz. Bu aniqmasliklarni xosila yordamida Lopital**q** qoidasiga ko'ra ochishni ko'raylik.

Teorema. Agar f (x), φ(x) funksiyalar x=a nuqta atrofidagi (x=a dan tashqari) barcha nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lib,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0 \text{ (yoki } \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty) \text{ va } \varphi'(a)\neq 0$$

bo'lsa, u xolda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Misollar.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$ **=(**$\dfrac{0}{0}$**)=** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 5x)'}{(5x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x}{1}$ **=5**

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ **=(**$\dfrac{\infty}{\infty}$**)=** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}$ **=(**$\dfrac{\infty}{\infty}$**)=** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}$ **=0**

3. $\lim\limits_{x\to 0}$ **(**xlnx)=($0\cdot\infty$)=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$=($\dfrac{\infty}{\infty}$)=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$=-$\lim\limits_{x\to 0}$ x=0

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$=($\infty-\infty$)=$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$=($\dfrac{0}{0}$)= $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}$=0

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$; bu ∞^0 ko'rinishdagi aniqmaslik

y= $\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ desak lny=$\dfrac{1}{x}$ln(1+ x^2);

$\lim\limits_{x\to\infty}$ lny=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}$ =0

ln($\lim\limits_{x\to\infty}$ y)=$\lim\limits_{x\to\infty}$(lny)=0 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}$ y=1 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ =**1.**

MISOLLAR.

Quyidagi limitlarni hisoblang.(383-400)

383. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-4x^2}{x^3-8}$

384. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^4-16}$

385. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

386. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$

387. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$

388. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x*\cos-\sin x}{x^3}$

389. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$

390. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$

391. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

392. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin mx}{\ln\sin x}$

393. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

394. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$

395. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-e^{\pi x-2x^2}}{\cos x}$

396. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$

397. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n e^{-x}$

398. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{x}$

399. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi}{2}x$

400. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x*\ln(x-1)$